Norsk Økonomisk Tidsskrift 119 (2005) s. 68-83

Realrenter i en oljeeksporterende økonomi*

Knut Anton Mork[A]

Sammendrag

En dynamisk optimaliseringsmodell med representativ agent og uendelig horisont brukes til å studere de dynamiske virkningene på realkurs og realrenter av en uventet økning i et lands utenlandsformue. Analysen er motivert ut fra økningen i den norske petroleumsformuen. Modellen skiller mellom konkurranseutsatte og skjermede goder og antar at skjermede goder produseres ved hjelp av kapital som akkumuleres ved investering av konkurranseutsatte varer. Akkumuleringsprosessen er tidkrevende og gjenstand for implementeringskostnader. Artikkelen viser hvordan en formuesøkning ikke bare fører til realappresiering, men også til økte realrenter over en relativt lang periode.

1 INNLEDNING

Denne artikkelen handler ikke egentlig om olje, men om optimal reaksjon på et uventet hopp i et lands utenlandsformue. Ikke desto mindre finner vi de fremste eksemplene på slike begivenheter blant verdens oljenasjoner, deriblant Norge. Selv om den norske oljeformuen utgjør en relativt liten del av Norges nasjonalformue, har olje og gass bidratt til å gjøre Norge veldig rikt veldig raskt. Som følge av de teknologiske gjennombruddene tidlig på nittitallet har den norske oljeproduksjonen nådd en topp som ingen overhode hadde tenkt seg for 35 år siden, og gassproduksjonen vokser fortsatt. Samhold i OPEC, en dollar som lenge holdt seg sterk, og kraftig etterspørselsvekst i Østen har medvirket til å gjøre den teknologiske suksessen til et økonomisk eventyr. Ved utgangen av tredje kvartal 2005 stod det 1281,1 milliarder kroner i Statens Petroleumsfond (SPF), eller 93% av annualisert BNP for fastlands-Norge i samme kvartal. Tross overskridelser på statsbudsjettet ventes fondet fortsatt å vokse vesentlig etter som oljen og gassen høstes.

Mange økonomer har vært opptatt av å understreke at denne formuesøkningen bare er tilsynelatende fordi den ikke innebærer noe mer enn en porteføljereallokering fra olje og gass «på rot» til finansielle aktiva. Denne artikkelen tar derimot som utgangspunkt at svært mye, om ikke det meste, av den finansielle formuesøkningen vi så omkring århundreskiftet, kom som en nyhet for det meste av befolkningen, dels kanskje fordi de ikke hadde vært orientert om situasjonen, men også fordi den nye teknologien og de gunstige økonomiske omgivelsene gav en langt høyere kontantstrøm enn noen hadde ventet.

* Forfatteren har hatt nytte av kommentarer fra Mats Kinnwall, Jan Häggström, Espen Moen, Solveig K. Erlandsen, Tor Jakob Klette, anonyme konsulenter og seminardeltakere ved Universitetet i Oslo, Handelshøyskolen BI og Norges Bank. Verken disse eller forfatterens arbeidsgiver, Svenska Handelsbanken AB (publ), har ansvar for eventuelle feil.
JEL-klassifisering: E43, F43, Q33.

[A] Knut Anton Mork er Ph.D. i samfunnsøkonomi fra MIT i 1977. Han er i dag sjeføkonom for Handelsbanken i Norge.

Omtrent på samme tid som politikere og publikum innså at denne formuesøkningen var på vei, begynte det norske rentenivået å skille lag med verden omkring. I 2000 satte sentralbankene i USA, Storbritannia og eurosonen sine renter ned, mens de norske ble liggende. Etter et halvt år med litt lavere renter i 2002 ble de norske rentene igjen hevet. Og det var ikke bare de nominelle rentene som var høyere hos oss. Med omtrent like høy inflasjon i Norge som i omverdenen ble realrenteforskjellen tilsvarende. I 2003 ble endelig de norske rentene også senket, og det til gagns. Men samtidig falt den norske inflasjonen godt under det som kunne observeres i andre vestlige land. Slik kan det hevdes at de norske realrentene konsekvent har ligget over dem i eurosonen fram til dette skrives i januar 2006.

En enkel forklaring på de høye norske rentene er at økningen i oljeformuen stimulerte offentlig og privat etterspørsel etter varer og tjenester, og at rentene måtte holdes høye for å hindre at etterspørselen gikk ut over kapasiteten til å levere og dermed ble inflasjonsdrivende. Problemet med denne forklaringa er at den økte oljeformuen burde kunne finansiere et permanent underskudd på vare- og tjenestebalansen. Dermed burde hele etterspørselsøkningen kunne tilfredsstilles av importvarer, slik at de ikke skulle behøve å presse opp det innenlandske prisnivået.

Tesen i denne artikkelen er at en slik løsning ville være mulig, men ikke optimal. Nordmenn foretrekker, som folk flest, en balansert sammensetning av sitt konsum. De ønsker ikke bare importvarer, verken generelt eller på marginen, men også innenlandsproduserte varer og – ikke minst – tjenester. Det stadige kravet om bedre tjenester i helse, eldreomsorg og utdanning bærer bud om dette. Konkurranseutsatte og skjermede goder er med andre ord imperfekte substitutter i konsumet. Og produksjon av skjermede goder krever innenlandske ressurser. Importert utstyr kan være nyttig, men ikke nok. Slik øker etterspørselspresset etter innenlandske ressurser når utenlandsformuen stiger.

Men tilbudet av slike ressurser er begrenset, særlig på kort sikt. Som vist mange steder i litteraturen vil derfor den relative prisen på skjermede goder presses opp. Vi får med andre ord realappresiering[1] (Golub, 1983, de Grauwe, 1996 og andre)[2]. Som vi imidlertid skal se, er det grunn til å tro at realappresiering bare er begynnelsen på en lengre historie. Med høyere priser på skjermede goder vil lønnsomheten i skjermet sektor stige og slik gi bedriftene insentiver til å investere i ny produksjonskapasitet, mens individer får insentiver til å søke utdanning eller omskolering for å søke arbeid i denne sektoren. Etter som dette skjer, vil realappresieringa helt eller delvis reverseres. Det vi dessuten skal se på i denne artikkelen, er at denne prosessen vil falle sammen med en periode med høy realrente. Realrenta stiger som en refleksjon av at den relative prisen på skjermede goder gradvis faller tilbake etter den første oppgangen. Høyere realrenter gir så husholdningene insentiv til å utsette konsumøkningen til tilstrekkelig kapasitet er bygd opp til å levere det de etterspør.

En rekke forfattere, som Gavin (1990,1992) og Steigum og Thøgersen (2003) har analysert tilpasning til eksterne sjokk. Noen, som Neary og Purvis (1983), Murphy (1988) og Gavin (1990) peker på at realkursen tenderer til å skyte over sin langsiktige likevektsverdi i slike sammenhenger. Realrenta har imidlertid ikke stått i sentrum av analysene. Det er det denne artikkelen forsøker å gjøre. Den fokuserer på de dynamiske bevegelsene i så vel realrenter som realkurs i en dynamisk optimaliseringsmodell med en representativ agent og uendelig tidshorisont. Den søker også å finne grove anslag på hvor store virkningene kan tenkes å bli og hvor lenge de kan vare. Disse anslagene kan vi så sammenlikne med det vi faktisk har observert i Norge i inneværende tiår.

---

1 Det er noe omstridt hvorvidt Norge har opplevd realappresiering i trendforstand siden oljeforekomstene ble oppdaget omkring 1970. Akram (2003) har presentert empiriske argumenter mot denne påstanden, selv om også han observerte vesentlig realappresiering mellom 2000 og 2002.

2 Denne typen realappresiering omtales til tider som hollandsk syke etter det som skjedde i Nederland etter oppdagelsen av naturgass på sekstitallet. For at realappresiering skal kalles en sykdom, må vi imidlertid ha en eller annen form for mistilpasning, spesielt lønnsrigiditet, som vi ser bort fra i denne artikkelen.

Steigum (1992) skiller seg litt fra den nevnte litteraturen ved å studere det omvendte problemet, nemlig det store fallet i oljeinntektene etter prisfallet i 1986. I likhet med nærværende artikkel antar Steigum at omstillingene er gjenstand for tilpasningskostnader. I tråd med resultatene nedenfor finner han at fallet i oljeinntektene da bør føre til så vel realdepresiering som midlertidig lave realrenter. Imidlertid går nærværende artikkel lenger i å analysere størrelsesorden og varighet for slike virkninger. Steigum gir ellers en del oppmerksomhet til behovet for og mulighetene til å ta opp lån i en overgangsperiode. Dette er naturligvis mindre relevant når vi ser på en økning i stedet for et fall i oljeinntektene.

Analysen i seksjon 2–6 nedenfor antar implisitt at alle transaksjoner foregår i private markeder og mellom private aktører. I praksis spiller offentlig sektor en vesentlig rolle for den norske oljeformuen, både gjennom SPF og fordi så mange viktige skjermede goder produseres i offentlig sektor. I seksjon 7 diskuterer vi derfor uformelt offentlig sektors rolle. Selv om modellen bare ser på volumer og relative priser, tar vi også uformelt opp noen pengepolitiske problemstillinger. Seksjon 8 konkluderer.

2 MODELLFORMULERING

Den analysen vi legger opp til, krever en modell som skiller mellom konkurranseutsatt og skjermet sektor, K-sektor og S-sektor for kort. Imidlertid skal vi ikke skille mellom innenlandske og utenlandske goder dersom begge kan handles internasjonalt. Det vi her kaller goder fra K-sektor kan med andre ord utmerket godt være importert. Det som er viktig her, er at K-goder og S-goder er imperfekte substitutter i konsumet slik at husholdningene ønsker å konsumere litt av hvert av dem.

Selv om S-goder ikke kan importeres, skal vi anta at produksjonen av slike goder krever K-goder som innsatsfaktor. Sammenhengen kan være direkte, som når sykehusene bruker importert utstyr til å produsere helsetjenester. Men den kan også være indirekte i den forstand at arbeidskraft overføres fra K-sektor til S-sektor. For at denne ressursoverføringa skal bety noe for realrenteutviklinga, må den være tidskrevende, for ellers ville det ikke være behov for høye realrenter for å bremse etterspørselen etter S-goder når husholdningene nettopp er blitt rikere. For å få fram dette poenget antar modellen at K-goder må akkumuleres som kapital før de kan brukes til å produsere S-goder. For å hindre at akkumuleringa skjer uendelig raskt i modellen, må vi videre anta at den er forbundet med en implementeringskostnad.

Modellen tar da utgangspunkt i den representative husholdningens dynamiske optimaliseringsproblem,

$$\max U = \int_0^\infty e^{-\rho t} u(c_S, c_K) dt, \rho > 0, \tag{2.1}$$

med bibetingelser

$$c_S = f(k), f' > 0, f'' \leq 0, \tag{2.2}$$

$$\dot{k} = g(x) - \delta k, x = y + m - c_K, g' > 0, g'' \leq 0, g(0) = 0, g'(0) = 1, \tag{2.3}$$

$$\dot{a} = r^* a - m. \tag{2.4}$$

Her står c_S og c_K for konsum av henholdsvis S-goder og K-goder. Øyeblikksnyttefunksjonen u antas som vanlig å være tiltakende i begge argumenter og dessuten å være strengt konkav og differensierbar med partieltderiverte u_S og u_K. Ytterligere forenkling oppnår vi ved å anta at den intertemporale substitusjonselastisiteten er konstant og lik for begge goder, slik at funksjonen u kan skrives på formen

$$u(c_S, c_K) = \frac{v(c_S, c_K)^{1-1/\sigma}}{1-1/\sigma},$$

der funksjonen v er homogen av grad 1 med en intratemporal substitusjonselastisitet som vi kaller τ, mens σ er den intertemporale substitusjonselastisiteten.

Likning (2.2) gir oss produktfunksjonen som viser hvordan akkumulerte K-goder brukes til å produsere S-goder med avtakende utbytte. Arbeidskraft kunne ha vært tatt med som innsatsfaktor, men dette ville ha komplisert analysen uten å forandre de kvalitative resultatene[3]. For at kjøpekraftparitet skal gjelde på lang sikt, må produktfunksjonen vise konstant skalautbytte, noe vi åpner for ved å tillate den annenderiverte å bli null som et spesialtilfelle. For enkelhets skyld vil vi imidlertid gå ut fra at funksjonen f normalt har konstant elastisitet α, der $0 < \alpha < 1$.

Likning (2.3) spesifiserer hvordan K-goder akkumuleres til kapital til bruk i produksjonen av S-goder. Akkumulasjonen er en tiltakende, men konkav funksjon av investeringsraten x. Konkaviteten representerer konvekse implementeringskostnader som spesifisert av Abel (1981), Hayashi (1982) og andre. Av denne grunn skal vi omtale funksjonen g som implementeringsfunksjonen. Restriksjonene på denne funksjonen innebærer at elastisiteten ikke kan være konstant. Ikke desto mindre vil vi bruke symbolet β for funksjonens (variable) elastisitet ε og for aboluttverdien til elastisiteten av den deriverte.

Variabelen m står for nettoimport (av K-goder), og y er en konstant «endowment» av slike varer. Hadde vi modellert innsatsen av arbeidskraft direkte, ville vi ha spesifisert y som verdien av en produktfunksjon. Slik vi har valgt spesifikasjonen her, kan vi tenke på y som en omtrentlig representasjon av arbeidsstyrken. For å unngå flere tilstandsvariabler ser vi også bort fra kapital som innsatsfaktor i produksjonen av K-goder.

Likning (2.4) beskriver endelig hvordan utenlandsformuen akkumuleres i henhold til utlandets realrente r^* med unntak av det som tas ut i form av nettoimport. Som vanlig bruker vi apostrofer for de deriverte og prikker for de tidsderiverte av ulike funksjoner og variabler.

3 FØRSTEORDENSBETINGELSER

Etter som modellen er fri for eksternaliteter, er løsningen på husholdningenes optimaliseringsproblem også modellens likevektsløsning i frikonkurranse. For å løse optimaliseringsproblemet spesifiserer vi følgende Hamilton-funksjon:

$$H = e^{-\rho t}\{u[f(k), c_K] + \lambda[g(y + m - c_K) - \delta k] + \mu(r^* a - m)\}.$$

Pontryagins maksimumsprinsipp gir da følgende førsteordensbetingelser:

$$\frac{\partial H}{\partial m} = e^{-\rho t}(\lambda g' - \mu) = 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial H}{\partial c_K} = e^{-\rho t}(u_K - \lambda g') = 0 \tag{3.2}$$

$$\frac{d(e^{-\rho t}\lambda)}{dt} \equiv e^{-\rho t}(\dot{\lambda} - \rho\lambda) = -\frac{\partial H}{\partial k} \equiv -e^{-\rho t}(u_S f' - \lambda\delta) \tag{3.3}$$

$$\frac{d(e^{-\rho t}\mu)}{dt} \equiv e^{-\rho t}(\dot{\mu} - \rho\mu) = -\frac{\partial H}{\partial a} \equiv -e^{-\rho t}\mu r^*. \tag{3.4}$$

[3] Dette kan virke overaskende i lys av debatten om hollandsk syke. Imidlertid må vi som nevnt ha lønnsrigiditet for at hollandsk syke skal være et problem, og slike komplikasjoner ignorerer vi her. Den offentlige debatten har ofte også nevnt behovet for å bevare kompetansen i tradisjonell industri for å ha den tilgjengelig når oljereservene er uttømt. Skulle vi ha tatt med slik kompetanse som enda en tilstandsvariabel, ville modellen ha blitt nokså uhåndterbar.

Den siste betingelsen impliserer $\dot{\mu} = (\rho - r^*)\mu$. Siden ρ er konstant, innebærer dette at kotilstandsvariabelen μ, som kan tolkes som skyggeprisen for utenlandsformuen a, må være konstant over tid om en stasjonærløsning skal eksistere, og i så fall må vi også ha $\rho = r^*$. Dette er en nokså vanlig regularitetsbetingelse i denne typen modeller[4].

Gitt dette resultatet ser vi at (3.1) og (3.2) impliserer

$$u_K\left[f(k), c_K\right] = \mu .$$

Siden μ er konstant over tid, innebærer denne betingelsen at konsumet av K-goder utvikler seg dynamisk som

$$\dot{c}_T = -\frac{u_{KS}}{u_{KK}} f'\dot{k} \equiv \xi\dot{k} , \tag{3.5}$$

der $\dot{k}$ er gitt av (2.3). Appendikset viser at $\xi = \dfrac{\alpha\theta(\sigma-\tau)}{\theta\sigma + (1-\theta)\tau} \dfrac{c_K}{k}$, der θ er budsjettandelen for S-goder i konsumet.

Likning (3.3) gir likevektbetingelsen for investering av K-goder til kapital til bruk i S-sektor. Etter noe omformulering sier den det samme som i standard investeringsteori, nemlig at grensenytten av implementert kapital må være lik den marginale brukerkostnaden:

$$u_S f' = \lambda\left(\rho + \delta - \dot{\lambda}/\lambda\right). \tag{3.6}$$

Hvis kapitalkostnaden utenom verdigevinst, $\lambda(\rho + \delta)$, blir større enn grensenytten, vil skyggeprisen stige over tid, slik at $\dot{\lambda}/\lambda > 0$. Imidlertid ser vi også at (3.1) impliserer at $\lambda = \mu/g'(x)$. Siden μ er konstant over tid, betyr dette at skyggeprisens vekstrate er

$$\dot{\lambda}/\lambda = \varepsilon\,\dot{x}/x .$$

Denne likheten kan vi bruke til å eliminere $\dot{\lambda}/\lambda$ fra likning (3.6) og så løse for den tidsderiverte av realinvesteringene som

$$\dot{x} = (x/\varepsilon)\left\{\rho + \delta - f'(k)g'(x)\frac{v_S}{v_K}\left[f(k), c_K\right]\right\}.$$

Her har vi gjort bruk av (3.2) og den spesielle formen vi antok for øyeblikksnyttefunksjonen u.

Disse utledningene innebærer at modelldynamikken kan beskrives av følgende sett av fire differensiallikninger i variablene x, k, c_K og a:

$$\dot{x} = (x/\varepsilon)\left\{\rho + \delta - f'(k)g'(x)\frac{v_S}{v_K}\left[f(k), c_K\right]\right\} \tag{3.7}$$

$$\dot{k} = g(x) - \delta k \tag{3.8}$$

$$\dot{c}_K = \xi\left[g(x) - \delta k\right] \tag{3.9}$$

$$\dot{a} = \rho a - x - c_K + y . \tag{3.10}$$

[4] Dette innebærer i hovedsak at den subjektive tidspreferanseraten ρ er den samme i inn- og utland og at omverdenen allerede befinner seg i stasjonærløsningen. Fra litteraturen er det velkjent at ulike (og konstante) tidspreferanserater i ulike land impliserer at landet med lavest tidspreferanserate til slutt vil eie all verdens formue, se for eksempel Barro og Sala-i-Martin (1999), s. 100.

4 SADELPUNKTBANE

Appendikset viser at dette systemet kan tilnærmes rundt stasjonærløsningen som det lineære systemet

$$
\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{k} \\ \dot{c}_K \\ \dot{a} \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} x - \bar{x} \\ k - \bar{k} \\ c_K - \bar{c}_K \\ a - \bar{a} \end{pmatrix}, \tag{4.1}
$$

der overstreker indikerer stasjonærløsninger og matrisen **B** er

$$
\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \rho + \delta & \left(\frac{x}{\varepsilon k}\right)\left(\frac{\rho+\delta}{\tau}\right)[\alpha + (1-\alpha)\tau] & -\left(\frac{x}{\varepsilon k}\right)\left(\frac{\rho+\delta}{\tau c_K}\right) & 0 \\ g' & -\delta & 0 & 0 \\ \xi g' & -\xi\delta & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & \rho \end{pmatrix}. \tag{4.2}
$$

Systemets egenverdier er de karakteristiske røttene for denne matrisen. Formen på den fjerde søylen viser uten videre at ρ er en slik rot, og den er åpenbart ustabil. Fordi tredje linje er proporsjonal med andre, er en annen rot lik null, og den er heller ikke stabil. Appendikset viser at produktet av de to gjenværende røttene er $-\delta(\rho + \delta)[1+(1-\alpha+\phi)\beta/\varepsilon]$, der

$\phi = \dfrac{\alpha}{\theta\sigma + (1-\theta)\,\tau} > 0$, slik at produktet er negativt. Da kan vi konkludere at systemet har én og bare én stabil rot. Appendikset viser at denne er reell og har absoluttverdi

$$
\gamma = -\rho/2 + \sqrt{\rho^2/4 + \delta(\rho+\delta)[1+(1-\alpha+\phi)\beta/\varepsilon]}. \tag{4.3}
$$

Forekomsten av én og bare én stabil rot garanterer at det lineariserte systemet følger en sadelpunktbane. Hvis sadelpunktbanen forstyrres, hopper da de to variablene som kan hoppe, nemlig investeringer og K-varekonsum, akkurat så mye som trengs for at alle variablene til slutt skal nå stasjonærløsningen når de over tid utvikler seg i henhold til den stabile rota $-\gamma$.

Som vanlig finner vi startpunktet for sadelpunktbanen ved å sette likhetstegn mellom de initiale vekstratene som gitt ved den stabile løsningen og de tilsvarende vekstratene i den opprinnelige modellformuleringa (4.1). Det gir oss følgende fire likninger:

$$
-\gamma(x_0 - \bar{x}) = (\rho+\delta)(x_0 - \bar{x}) + b_{xk}(k_0 - \bar{k}) + b_{xK}(c_{K0} - \bar{c}_K) \tag{4.4}
$$

$$
-\gamma(k_0 - \bar{k}) = g'(x_0 - \bar{x}) - \delta(k_0 - \bar{k}) \tag{4.5}
$$

$$
-\gamma(c_{K0} - \bar{c}_K) = \xi g'(x_0 - \bar{x}) - \xi\delta(k_0 - \bar{k}) \tag{4.6}
$$

$$
-\gamma(a_0 - \bar{a}) = -(x_0 - \bar{x}) - (c_{K0} - \bar{c}_K) + \rho(a_0 - \bar{a}), \tag{4.7}
$$

der b_{xk} og b_{xK} betegner de relevante elementene i koeffisientmatrisen **B** i (4.2).

Likning (4.5) og (4.6) gir initialnivåene etter eventuelle hopp for realinvesteringene og K-varekonsumet som funksjoner av deres egne stasjonærløsningsnivå og forskjellen mellom initialverdi og stasjonærløsning for realkapitalen k:

$$x_0 = \bar{x} + \left(\frac{\delta - \gamma}{g'}\right)\left(k_0 - \bar{k}\right) \tag{4.8}$$

$$c_{K0} = \bar{c}_K + \xi\left(k_0 - \bar{k}\right). \tag{4.9}$$

Hvis vi setter disse uttrykkene inn i (4.4), får vi tilbake den samme likninga for γ som vi fikk fra den karakteristiske likninga for matrisen **B**. Likning (4.4) har med andre ord ingen videre interesse. Derimot gir likning (4.7) relasjonen mellom sadelpunktbanene for de to tilstands-variablene som ikke kan hoppe:

$$a_0 - \bar{a} = \left[\frac{(\delta - \gamma)/g' + \xi}{\gamma + \rho}\right]\left(k_0 - \bar{k}\right). \tag{4.10}$$

Nå har vi det verktøyet vi trenger for å bestemme stasjonærløsningene for de fire variablene x, k, c_K og a samt initialverdiene x_0 og c_{K0} som funksjoner av initialformuen a_0. De seks likningene består av (4.8) – (4.10) sammen med stasjonærløsningsbetingelsene for x, k og a:

$$f'\left(\bar{k}\right)g'\left(\bar{x}\right)\frac{v_S}{v_K}\left[f\left(\bar{k}\right), \bar{c}_K\right] = \rho + \delta \tag{4.11}$$

$$g\left(\bar{x}\right) = \delta\bar{k} \tag{4.12}$$

$$\rho\bar{a} = \bar{x} + \bar{c}_K - y. \tag{4.13}$$

Siden betingelsene for stasjonærløsningene for c_K og k er kollineære, trenger vi likning (4.10) for å determinere systemet.

Som vi skal se i neste seksjon, er virkningen på realkapitalens stasjonærverdi av en endring i initialformuen spesielt viktig for virkningen på realrenta. Virkningen på realkapitalens stasjonærverdi finner vi ved å derivere (4.10) – (4.13) implisitt med hensyn på a_0 og løse for $d\bar{k}/da_0$. Ved hjelp av resultatene i appendikset finner vi da:

$$\frac{d\bar{k}}{da_0} = \psi\frac{k_0}{c_{K0}}, \text{ der} \tag{4.14}$$

$$\psi = \frac{\rho(\gamma + \rho)}{(\gamma/\beta)\left[(1 + \rho/\delta)\, x_0/c_{K0} + \alpha\beta\right] + \tau\left[(\gamma + \rho)(1 - \alpha + \varepsilon/\beta) + \rho\phi\right]} > 0.$$

Ikke overraskende finner vi altså at en uventet økning i initialformuen hever realkapitalens stasjonærverdi. Dette betyr så at husholdningene kan konsumere mer S-goder på lang sikt. De kan også konsumere mer K-goder i og med at

$$\frac{d\bar{c}_K}{da_0} = \left[\tau\left(1 - \alpha + \varepsilon/\beta\right) + \alpha\right]\psi > 0. \tag{4.15}$$

5 REALRENTE OG REALKURS

Siden modellen har to goder, har den også to realrenter, en for tilgodehavender i K-goder og en for tilgodehavender i S-goder. Tilgodehavender i K-goder kan handles like fritt internasjonalt som de underliggende godene. Realrenta på slike tilgodehavender er derfor identisk med den internasjonale realrenta r^*. S-goder kan ikke handles internasjonalt eller akkumuleres fysisk, men kan akkumuleres indirekte på følgende måte: En aktør kan gi S-goder i bytte for K-goder på det innenlandske markedet, investere disse K-godene til avkastning r^* på det internasjonale kapitalmarkedet, og så bytte dem tilbake mot S-goder seinere. Utbyttet av en slik investering, regnet i S-goder, vil bli avkastningen r^* på å investere i K-goder minus den økningen i den relative prisen mellom S-goder og K-goder som aktøren må finne seg i når K-godene til slutt skal byttes mot S-goder. Om vi kaller denne relative prisen p, har vi da:

$$r_S - r^* = -\dot{p}/p\,.$$

I praksis er det selvsagt vanlig å definere en generell realrente ved hjelp av konsumprisindeksen. Det tilsvarende i modellen her blir en veid sum av realrentene for de to godene, der vektene er budsjettandelene i konsumet:

$$r = \theta r_S + (1-\theta) r^*\,.$$

Dette skal vi kalle den innenlandske realrenta (den kan også kalles konsumrealrenta). Ved å sette inn fra den første likninga i den andre finner vi da at forskjellen mellom innenlandsk og internasjonal realrente er proporsjonal med forventet fall i den relative prisen mellom K- og S-goder:

$$r - r^* = \theta r_S + (1-\theta) r^* - r^* = \theta(r_S - r^*) = -\theta\, \dot{p}/p\,. \tag{5.1}$$

I modellen er denne relative prisen i likevekt lik den marginale substitusjonsraten $u_s/u_K = v_s/v_K$. Om initialformuen stiger, vil denne først hoppe til et høyere nivå etter som formuesøkningen øker etterspørselen etter både K- og S-goder mens tilbudet av S-goder er begrenset av den eksisterende realkapitalen. Men etter som realinvesteringene også hopper til sin nye sadelpunktbane, vil kapasiteten til å levere S-goder gradvis vokse over tid, og da vil den relative prisen begynne å falle igjen. Det er denne gradvise bevegelsen som uttrykkes av den relative tidsderiverte $\dot{p}/p$. Ved å bruke resultatene i appendikset kan vi utlede den som følger:

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{p}}{p} &= \left(\frac{1}{v_S/v_K}\right)\frac{\partial(v_S/v_K)}{\partial c_S} f\dot{k} + \left(\frac{1}{v_S/v_K}\right)\frac{\partial(v_S/v_K)}{\partial c_K}\dot{c}_K \\
&= -\left(\frac{1}{\tau c_S}\right)\alpha\frac{c_S}{k}\dot{k} + \left(\frac{1}{\tau c_K}\right)\xi\dot{k} \\
&= \frac{1}{\tau}\left[-\alpha + \alpha\frac{\theta(\sigma-\tau)}{\theta\sigma + (1-\theta)\tau}\right]\frac{\dot{k}}{k} \\
&= -\phi\frac{\dot{k}}{k}
\end{aligned}$$

Setter vi dette inn i (5.1), får vi så

$$r - r^* = \theta\phi\, \dot{k}/k\,, \tag{5.2}$$

som er positivt så lenge realkapitalen vokser fram mot sin nye og høyere stasjonærverdi etter en økning i initialformuen. Dermed har vi nådd fram til det viktigste resultatet i analysen:

Påstand 1: *Et land som mottar en uventet økning i sin utenlandsformue, må regne med høyere realrente enn omverdenen under overgangsperioden mens økonomien tilpasser seg formuesøkningen.*

Likning (5.1) forteller også at udekket renteparitet holder i modellen. På liknende måte som vi definerte den innenlandske realrenta ovenfor, kan vi definere den reelle valutakursen q som det konsumvektede gjennomsnittet av de relative prisene for K- og S-goder i forhold til utenlandske. På grunn av loven om ens pris er den relative prisen for K-goder lik 1, mens den relative prisen for S-goder er p. Utledningene ovenfor viser da at den forventet realkursutvikling etter formuesøkningen blir

$$\text{(5.3)} \qquad \dot{q}/q = \theta\, \dot{p}/p\,.$$

Likning (5.1) viser at uttrykket til høyre nettopp er lik renteforskjellen (med motsatt fortegn), som under udekket renteparitet.

Det kan virke paradoksalt at realkursen ifølge disse likningene skal depresiere og ikke appresiere etter en uventet formuesøkning. Imidlertid er det viktig å merke seg at den aller første reaksjonen blir et diskontinuerlig hopp (oppover) for realkursen, med andre ord øyeblikkelig appresiering. Først deretter vil den begynne å depresiere gradvis. Det er mulig, men ikke nødvendig, at denne prosessen til slutt fører realkursen helt tilbake til utgangspunktet. Dette ser vi fra betingelse (4.11) for stasjonærløsningen, som impliserer

$$\text{(5.4)} \qquad \overline{p} = \frac{\overline{u}_S}{\overline{u}_K} = \frac{\overline{v}_S}{\overline{v}_K} = \frac{\rho + \delta}{f'(\overline{k})g'(\overline{x})}\,.$$

Hvis f og g er strengt konkave, avtar nevneren i den siste brøken etter som stasjonærverdiene for realkapitalen og investeringsraten stiger, slik at realappresiering blir resultatet når vi sammenlikner stasjonærløsningene før og etter hoppet i utenlandsformuen. Forklaringa på dette ligger i så fall i implementeringskostnadene for realinvesteringene og det avtakende utbyttet av å flytte ressurser fra K-sektor til S-sektor. Det er nemlig disse kreftene som gjør henholdsvis f og g konkave. I det lange løp kan det imidlertid være rimelig å anta at alle ressurser skal kunne overføres uten varige kostnader. Når vi sammenlikner stasjonærløsninger, kan det derfor være like rimelig å anta konstant utbytte og fullstendig fravær av implementeringskostnader. Da vet vi generelt at faktorprisutjevning vil gjelde. I formelen over blir da de to deriverte i nevneren konstante, slik at vi ikke får noen realkursendring fra den ene stasjonærløsningen til den andre. Den gradvise realdepresieringa etter det første hoppet fører til slutt realkursen tilbake til utgangspunktet.

Dette resultatet kan vi oppsummere som

Påstand 2: *En uventet økning i utenlandsformuen får realkursen til først å appresiere i form av et hopp. Dette hoppet representerer et øyeblikks avvik fra udekket renteparitet. Imidlertid vil hoppet overskyte realkursens nye stasjonærverdi og vil derfor følges av en gradvis realdepresiering langs sadelpunktbanen. Denne bevegelsen vil samsvare med udekket renteparitet. Realkursen kan til slutt vende tilbake til nivået før det første hoppet, men dette er ikke nødvendig.*

6 HVOR STOR OG HVOR VARIG VIRKNING?

Selv om likning (5.2) viser at et land som ser sin utenlandsformue øke, vil få høyere realrente enn verden omkring, gjenstår det å se om forskjellen blir stor nok til å bli merkbar og varig nok til å bety noe. For å få svar på dette, må vi utlede et eksplisitt uttrykk for den siste faktoren i likning (5.2), med andre ord den relative vekstraten for realkapitalen etter hoppet i utenlandsformuen.

Fra løsningen på det lineariserte, dynamiske systemet (4.1), ser vi at den initiale vekstraten for realkapitalen er

$$(\dot{k}/k)_0 = \gamma\left(\bar{k} - k_0\right)/k_0 \,. \tag{6.1}$$

Forskjellen mellom stasjonærverdi og initialverdi for realkapitalen er det samme som forskjellen mellom den nye og den gamle stasjonærverdien. Ifølge likning (4.14) er denne tilnærmet lik

$$\bar{k} - k_0 \cong \frac{d\bar{k}}{da_0}\Delta a_0 = \psi \frac{k_0}{c_{K0}} \Delta a_0 \,,$$

der, som ovenfor, $\psi = \dfrac{\rho(\gamma + \rho)}{(\gamma/\beta)\left[(1+\rho/\delta)\,x_0/c_{K0} + \alpha\beta\right] + \tau\left[(\gamma+\rho)(1-\alpha+\varepsilon/\beta) + \rho\phi\right]} > 0$.

Som en tilnærming kan vi derfor skrive hoppet i realrenta som

$$r_0 - r^* = \theta\phi\gamma\psi \frac{\Delta a_0}{c_{K0}} \,. \tag{6.2}$$

Før vi ser på mulig størrelsesorden for dette uttrykket, kan det være nyttig å se på et par grensetilfeller. Det første slike tilfellet oppstår når S-goder og K-goder er perfekte substitutter i konsumet, slik at $\tau \to \infty$. Da går både ψ og ϕ mot null, mens γ forblir endelig, slik at produktet til høyre for likhetstegnet i (6.2) går mot null. I dette tilfellet får vi med andre ord ingen realrentebevegelse i forhold til utlandet i det hele tatt. Forklaringa er enkel, nemlig at husholdningene i dette tilfellet ikke bryr seg om hvorvidt det er S-goder eller K-goder de konsumerer, så lenge de får noe. Derfor vil de ikke ha noe imot å rette hele sin etterspørselsøkning mot K-goder når de oppdager at de blir rikere. Selv om tilbudet av S-goder er uelastisk på kort sikt, kommer det da ikke noe nytt etterspørselspress som driver prisen oppover. Men da blir det heller ingen grunn til å bygge ny kapasitet til å levere mer S-goder. Faktisk får vi ingen dynamisk tilpasning i det hele tatt. Økonomien hopper direkte fra den ene stasjonærløsningen til den andre. Den eneste forskjellen mellom de to løsningene er at nettoimporten øker med annuitetsverdien til formuesøkningen.

Dette tilfellet er viktig fordi det er så spesielt. Vanligvis er det langt fra likegyldig for husholdningene hva slags varer og tjenester de konsumerer. Den politiske debatten i Norge, særlig omkring århundreskiftet, gav tydelig inntrykk av at publikum formelig ropte på mer tjenester, som helse- og eldreomsorg og utdanning. Å få bedre råd til importerte varer var på ingen måte det samme. Men kapasiteten til å levere tjenester var begrenset på kort sikt og kunne bare ekspandere langsomt over tid gjennom investeringer i bygninger og utstyr samt utdanning eller omskolering av personale. Denne prosessen medførte likvektsbevegelser i relative priser og høyere realrente. Realrenta ble da høy nok til å gi tilstrekkelige insentiver til å utsette den konsumoppgangen som formuesøkningen muliggjorde, til kapasiteten ble tilstrekkelig utbygd til å levere de tjenestene som publikum ønsket[5].

[5] Et liknende, men mindre interessant tilfelle får vi hvis $\sigma \to \infty$. Da stiger realkapitalens stasjonærverdi, og en dynamisk justering finner sted, men uten oppgang i realrenta. Når husholdningen ikke bryr seg om hvorvidt en gitt konsumøkning kommer før eller siden, trenger de heller ikke noe insentiv til å utsette den

Det andre grensetilfellet oppstår når implementeringskostnadene for realinvesteringene går mot null, det vil si at implementeringsfunksjonen g blir lineær, slik at $\beta \to 1$ og $\varepsilon \to 0$. Som i det foregående tilfellet vil økonomien da hoppe direkte fra den ene stasjonærløsningen til den andre fordi $\gamma \to \infty$. Realkapitalens stasjonærverdi vil stige fordi ψ fortsatt er positiv. Men den vil altså hoppe, slik at den med andre ord vokser med uendelig høy vekstrate, men bare et øyeblikk. Siden realrenteforskjellen mellom inn- og utland er proporsjonal med bevegelsene i realkapitalen, betyr dette så at realrenteforskjellen vil hoppe uendelig høyt, men bare et øyeblikk, og så straks falle tilbake til null.

Dette tilfellet er selvfølgelig for ekstremt til å være av praktisk interesse. Ikke desto mindre kan vi notere en praktisk viktig implikasjon: Jo høyere implementeringskostnad for realinvesteringer, jo høyere forskjell mellom innen- og utenlandsk realrente, men til gjengjeld vil forskjellen få desto kortere varighet. Det pragmatisk viktige spørsmålet blir da om det fins troverdige kombinasjoner av parameterverdier, for så vel formen på implementeringsfunksjonen g som for de andre parametrene, som impliserer en økonomisk signifikant økning i realrenteforskjellen med lang nok varighet til å være interessant.

For å se nærmere på dette parametriserer vi implementeringsfunksjonen som

$$g(x) = \frac{1}{\omega\nu}\left[(1+\omega x)^{\nu} - 1\right], \nu < 1. \tag{6.3}$$

Tabell 1: Verdier for β og ε for ulike verdier av ν

ν	β	ε
-1	0,67	0,67
0	0,82	0,33
0,5	0,91	0,17
0,9	0,98	0,03

Verdier av ν i nærheten av 1 innebærer at funksjonen er nær ved å være lineær. $\nu = 0$ er et grensetilfelle som tilsvarer $g(x) = \frac{1}{\omega}\ln(1 + \omega x)$. $\nu < 0$ er mulig og innebærer at funksjonen er enda mer konkav enn logaritmefunksjonen. Denne spesifikasjonen impliserer

$$\beta = \frac{\nu\omega x}{(1+\omega x)\left[1-(1+\omega x)^{-\nu}\right]} \text{ hvis } \nu \neq 0, \beta = \frac{\omega x}{(1+\omega x)\ln(1+\omega x)} \text{ hvis } \nu = 0; \quad \varepsilon = \frac{(1-\nu)\omega x}{1+\omega x}.$$

Vi står fritt til å velge skaleringsparameteren ω slik at $\omega x_0 = 0{,}5$. Tabell 1 viser hvordan β og x da varierer med ulike verdier for ν.

I litteraturen er den intertemporale substitusjonselastisiteten σ blitt estimert så lavt som null og så høyt som 2. Etter som renteforskjellen i (6.2) avhenger negativt av denne elastisiteten, virker det rimelig å fokusere på relativt høye verdier for å se om renteforskjellen likevel kan bli betydelig. Som hovedscenario antar vi $\sigma = 1{,}5$, men vi ser også på alternativer med $\sigma = 1$ og $\sigma = 2$. Renteforskjellen avhenger også negativt av den intratemporale substitusjonsraten τ. Her virker lave verdier mer relevante på grunn av de mange påstandene om at nordmenn har langt høyere behov for tjenester enn for importerte varer. Som hovedscenario antar vi derfor $\tau = 0{,}5$, men ser også på tilfeller med $\tau = 0{,}25$ og $\tau = 1$.

For den internasjonale realrenta følger vi Stortingets antakelse om en normal realavkastning på 4%, slik at $\rho = r^* = 0{,}04$. Depresieringsraten δ er usikker. Den kan sies å være lav fordi variabelen k i modellen omfatter humankapital. Men den kan også sies å være høy fordi k også omfatter innsatsfaktorer som i realiteten ikke er varige. Som et kompromiss antar vi $\delta = 0{,}2$. Produktfunksjonens elastisitet er usikker av liknende grunner. Imidlertid bør den være rimelig høy fordi realkapitalvariabelen omfatter humankapital og også fordi vi ville få et urimelig stort avvik fra faktorprisutjevning hvis skalautbyttet var for raskt avtakende. Vi antar derfor $\alpha = 0{,}75$.

Videre trenger vi initialverdier for de to konsumvarene og realinvesteringene. Gitt de grunnleggende problemene med å skille meningsfullt mellom K-goder og S-goder i praksis gjør vi en grov antakelse om at totalt konsum, offentlig og privat, som var 0,85 billioner kroner i 1999, kunne deles likt mellom de to, slik at c_{S0} og c_{K0} = begge er lik 0,425. Vi normaliserer den relative prisen mellom dem til 1 i utgangspunktet, slik at budsjettandelen θ = 0,5. Fysiske investeringer i 1999 var 0,27 billioner. Samlede investeringer i menneskelig og fysisk kapital i S-sektor kan ha vært høyere eller lavere enn dette. Noe vilkårlig antar vi x_0 = 0,2.

Endelig trenger vi et anslag på den økningen i utenlandsformuen, Δa_0, som setter det hele i gang. Vi har beregnet nåverdien per 1999 på norske myndigheters løpende og framtidige oljeinntekter, inkludert SPF, som 1,8 billioner kroner. Selvfølgelig har ikke alt dette kommet som en overraskelse; men sett ut fra pessimismen tidlig på nittitallet, er det god grunn til å hevde at svært mye av det faktisk kom som en overraskelse på store deler av befolkningen. Derfor har vi våget å anta Δa_0 = 1,8.

Tabell 2 viser de tilnærmede numeriske resultatene for realrenteforskjellen mot utlandet i hovedscenariet, som antar τ = 0,5 og σ = 1,5. Realrenteforskjellen er oppgitt som prosentpoeng (dvs. multiplisert med 100 i forhold til formlene). Den siste søylen, med overskrift «halvliv,», definert som 1n(2)/γ, viser hvor mange år det går ifølge modellen før den initiale realrenteøkningen halveres etter som systemet nærmer seg en ny stasjonærløsning.

Tabellen illustrerer det omvendte forholdet mellom størrelse og varighet på realrenteforskjellen. Ikke desto mindre inneholder den tilfeller der realrenteforskjellen er betydelig uten å være alt for kortvarig. For at dette skal være tilfelle, må implementeringsfunksjonen g være mindre konveks enn den logaritmiske, men heller ikke alt for nær den lineære, slik at $0 \leq \nu << 1$. Når dette er tilfelle, er modellen – med parameterverdier som i hovedscenariet – grovt konsistent med påstanden om at en økning i utenlandsformuen gir betydelig høyre realrente i utlandet over et betydelig tidsrom.

Tabell 3 viser de tilsvarende resultatene for tilfellet der husholdningene er enda mer opptatt av hva de konsumerer og når de konsumerer det, slik at de respektive substitusjonselastisitetene tar de lavere verdiene τ = 0,25 og σ = 1. I dette tilfellet er virkningene betydelig større. De varer ikke fullt så lenge, men likevel er ikke varigheten triviell.

Endelig viser tabell 4 resultatene for tilfellet der husholdningene er mer tolerante med hensyn til substitusjon, slik at τ = 1 og σ = 2. I dette tilfellet er virkningene avgjort mindre. Helt trivielle er de likevel ikke; og i de fleste tilfellene varer de rimelig lenge.

Tabell 2: Realrenteforskjell og halvliv for hovedscenariet

ν	$r_0 - r*$	Halvliv
-1	0,9	2,4
0	1,5	1,8
0.5	2,2	1,3
0.9	5,3	0,6

Tabell 3: Ralrenteforekjell og halvliv med lavere substitusjonselastisiteter

ν	$r_0 - r*$	Halvliv
-1	1,9	2,1
0	3,0	1,5
0.5	4,5	1,1
0.9	10,6	0,5

Tabell 4: Ralrenteforekjell og halvliv med høyere substitusjonselastisiteter

ν	$r_0 - r*$	Half life
-1	0,4	2,6
0	0,7	2,0
0.5	1,2	1,5
0.9	2,8	0,7

7 PENGE- OG FINANSPOLITIKK

Analysen vi har foretatt så langt, har ingen direkte implikasjoner for penge- og finanspolitikk ganske enkelt fordi modellen verken har penger eller en offentlig sektor. Men indirekte implikasjoner er ikke vanskelige å finne.

Realappresieringa i modellen er uavhengig av pengepolitikken. Imidlertid er det opp til pengepolitikken hvorvidt den i praksis skal finne sted gjennom den nominelle valutakursen eller gjennom det innenlandske prisnivået. Det første av disse alternativene er det naturlige valget i et regime med inflasjonsmål, mens det siste vil måtte bli resultatet under et vellykket valutamålregime. Når realkursens likevektsverdi endrer seg, blir det umulig å opprettholde stabil valutakurs og stabil inflasjon på samme tid. Med inflasjonsmål må sentralbanken reagere på formuesøkningen ved å heve de nominelle rentene i takt med likevektsbevegelsene i realrenta. En slik oppgave kan være krevende fordi modellen ovenfor – tross sine komplikasjoner – bare gir omtrentlige indikasjoner på hvor mye rentene bør settes opp og hvor lenge de bør holdes høye. Imidlertid er ikke problemet enestående for denne situasjonen, for pengepolitikk etter inflasjonsmål må alltid baseres på prognoser, som etter sin natur vil være usikre, og mer usikre jo mer unik situasjon en står overfor.

Finanspolitikken er naturligvis praktisk relevant i det norske tilfellet fordi staten opptrer som forvalter (gjennom SPF) av befolkningens finansformue og – ikke minst – fordi en rekke viktige S-goder leveres av offentlige etater, som utdanning og helse- og eldreomsorg. Til finanspolitikken har modellen to budskap. Det første budskapet er at bevilgningene til produksjon av S-goder bør begrenses på kort sikt fordi leveringskapasiteten er begrenset av de tilgjengelige ressursene. I modellen gjør realkurshoppet og realrentehoppet jobben med å holde etterspørselen etter S-goder tilbake til ny kapasitet er bygd opp. Om politiske myndigheter skal emulere de samme bevegelsene, må bevilgningene holdes tilbake i første omgang selv om pengene er tilgjengelige. Hvis ikke blir resultatet bare et større hopp i den relative prisen p enn optimalt – i praksis overdrevene lønnstillegg i de relevante sektorene – og ikke noe mer.

Det andre budskapet er at myndighetene så snart som mulig bør starte prosessen med å investere i ny fysisk og menneskelig kapasitet i S-sektor. Det er bare midlertidig at bevilgningene skal holdes tilbake. Skal befolkningen til slutt få nyte godt av den nye rikdommen, må ny kapasitet utvikles. Utfordringen blir derfor å holde tilbake bevilgninger til konsum samtidig som det bør bevilges til investeringer i fysisk og menneskelig kapital. Mekaniske regler – som den såkalte handlingsregelen – vil neppe være til stor nytte i så måte.

8 KONKLUSJONER

Den modellen vi her har analysert, ser ut til å kunne forklare mye av den økningen i renteforskjellen mellom Norge og omverdenen som begynte omkring århundreskiftet. En stund var forskjellen større enn det modellen rimelig ser ut til å kunne forklare. Årsaken kan selvfølgelig ha vært andre faktorer – noen har nevnt en overivrig sentralbank i etterkant av lønnsoppgjøret i 2002. På den annen side kan det være at modellen ikke er spesifisert godt nok til å forklare hele den observerte renteforskjellen.

Fra begynnelsen av 2003 smalnet imidlertid renteforskjellen inn og ble etter hvert negativ i forhold til eurosonen. Selv om innsnevringen kan forklares ut fra modellen ved at renteforskjellen bør avta over tid, er det vanskeligere å forklare at den ble negativ. Imidlertid skal vi merke oss at inflasjonen også var vesentlig lavere i Norge enn i eurosonen i denne perioden, slik at realrenteforskjellen faktisk var positiv, i alle fall *ex post*. Selv om det ikke fins penger i modellen, kan den altså på sett og vis være med å forklare den norske nærkontakten med deflasjon i denne perioden.

At finanspolitikken ble mer ekspansiv etter århundreskiftet, bør være hevet over tvil idet handlingsregelen ikke bare ble innført, men også systematisk overskredet. Imidlertid er det langt fra klart at den har fulgt anvisningene i modellen. Utgiftsøkningene har nemlig først og fremst gått til høyere overføringer, ikke til mer tjenesteproduksjon. Bevilgningene til helse og eldreomsorg har økt, men først og fremst til løpende drift, langt mindre til nyinvesteringer i fysisk og menneskelig kapital. Da er det neppe til å under seg over at den viktigste virkningen har vært en sterk relativ oppgang i offentlige lønninger. Den relative prisen p har økt, ellers har lite skjedd.

Appendiks:

A. Innledende betraktninger

Fra definisjonene av elastisitetene β og ε ser vi at de deriverte av funksjonen g kan skrives som

(A.1) $$g' = \frac{\beta g}{x},\ g'' = -\frac{\varepsilon g'}{x}.$$

Hvis f er isoelastisk ser vi tilvarende at

(A.2) $$f' = \alpha c_S/k,\ f'' = -(1-\alpha)f'/k.$$

Videre ser vi at vi i nærheten av stasjonærløsningen har

(A.3) $$g = \delta k,\ f'g'v_S/v_K = \rho + \delta.$$

Øyeblikksnyttefunksjonen kan skrives som

(A.4) $$u(c_S, c_K) = \tilde{u}(v(c_S, c_K)),\ \text{der}\ \tilde{u}(v) = \frac{v^{1-1/\sigma}}{1-1/\sigma}.$$

Da kan de førsteordens partieltderiverte skrives som

(A.5) $$u_S = \tilde{u}'v_S,\quad u_K = \tilde{u}'v_K,\ \text{slik at}$$

(A.6) $$u_S/u_K = v_S/v_K.$$

Fra definisjonen på den intratemporale substitusjonselastisiteten har vi

$$\frac{\partial(v_S/v_K)}{\partial(c_S/c_K)}\frac{(c_S/c_K)}{(v_S/v_K)} = -1/\tau,$$

som i sin tur innebærer at

(A.7) $$\frac{\partial(v_S/v_K)}{\partial c_S} = -\frac{(v_S/v_K)}{\tau c_S},\ \frac{\partial(v_S/v_K)}{\partial c_K} = \frac{(v_S/v_K)}{\tau c_K}.$$

Etter som v er homogen av grad 1, har vi også

(A.8) $$v_{SK} = \frac{v_S v_K}{v\tau}\ \text{og}$$

(A.9) $$c_S v_{SK} + c_K v_{KK} = 0,\ \text{slik at}\ v_{KK} = -\frac{c_S}{c_K}\frac{v_S v_K}{v\tau}.$$

Fra ovenstående og (A.2) følger det da at

(A.10) $$\xi = -f'\frac{u_{KS}}{u_{KK}} = \frac{c_K}{k}\frac{\alpha\theta(\sigma-\tau)}{\theta\sigma + (1-\theta)\tau}.$$

***B. Elementene i matrisen* B**

Vi partieltderiverer høyresidene av (3.7)–(3.10) med hensyn på tilstandsvariablene x, k, c_K og a og evaluerer de deriverte i stasjonærløsningen. For (3.7) innebærer dette at de deriverte kan evalueres under forutsetning av at klammeparentesen er lik null. Ved å la b_{xx} stå for den partieltderiverte av $\dot{x}$ med hensyn på x (og så videre) finner vi da følgende ved hjelp av resultatene i del A ovenfor:

(B.1) $$b_{xx} = -\frac{x}{\varepsilon} f g'' \frac{v_S}{v_K} = f g' v_S / v_K = \rho + \delta .$$

Videre finner vi

(B.2) $$\begin{aligned} b_{xk} &= -\frac{x g'}{\varepsilon \mu}\left[f'' \frac{v_S}{v_K} + f'^2 \frac{\partial (v_S/v_K)}{\partial c_S} \right] \\ &= -\frac{x}{\varepsilon} g' \left(f'' \frac{v_S}{v_K} - f'^2 \frac{v_S}{v_K} \frac{1}{\tau c_S} \right) \\ &= \frac{x}{\varepsilon} f g' \frac{v_S}{v_K} \left[(1-\alpha)\frac{1}{k} + \frac{\alpha c_S/k}{\tau c_S} \right] \\ &= \frac{x}{k} \frac{\rho+\delta}{\varepsilon\tau} [\alpha + (1-\alpha)\tau] . \end{aligned}$$

Endelig finner vi

(B.3) $$b_{xK} = -\frac{x}{\varepsilon} f g' \frac{\partial (v_S/v_K)}{\partial c_K} = -\frac{x}{\varepsilon} \frac{(\rho+\delta)}{\tau c_K} .$$

De resterende elementene i **B** følger uten videre.

C. Karakteristiske røtter

Den siste søylen i **B** inneholder bare nuller med unntak av ρ i det siste elementet. Da er det opplagt at ρ er en av røttene til den karakteristiske likninga $|\mathbf{B} - \eta \mathbf{I}| = 0$. Faktoren som multipliserer $(\rho - \eta)$ i den karakteristiske likninga er underdeterminanten øverst til venstre, med andre ord

$$\begin{vmatrix} \rho+\delta-\eta & b_{xk} & b_{xK} \\ g' & -(\delta+\eta) & 0 \\ \xi g' & -\xi\delta & -\eta \end{vmatrix} = b_{xK} \begin{vmatrix} g' & -(\delta+\eta) \\ \xi g' & -\xi\delta \end{vmatrix} - \eta \begin{vmatrix} \rho+\delta-\eta & b_{xk} \\ g' & -(\delta+\eta) \end{vmatrix}$$

$$= b_{xK}\left(-\xi\delta g' + \xi\delta g' + \xi g' \eta\right) + \eta\left[(\delta+\eta)(\rho+\delta-\eta) + g' b_{xk}\right]$$

$$= \eta\left[b_{xK}\xi g' + (\delta+\eta)(\rho+\delta-\eta) + g' b_{xk}\right]$$

Siden η slik kan faktoreres ut, må null også være en av røttene. De to siste røttene finner vi ved å sette det siste uttrykket i hakeparentes lik null. Dette gir løsningen

(C.1) $$\eta = \frac{1}{2}\left[\rho \pm \sqrt{\rho^2 + 4\delta(\rho+\delta) + 4g'\left(b_{xk} + \xi b_{kK}\right)}\right].$$

Her ser vi at

$$\begin{aligned} b_{xk} + \xi b_{kK} &= \frac{x}{k}\frac{\rho+\delta}{\varepsilon\tau}[\alpha + (1-\alpha)\tau] - \frac{x}{c_K}\frac{\rho+\delta}{\varepsilon\tau}\frac{c_K}{k}\frac{\alpha\theta(\sigma-\tau)}{\theta\sigma + (1-\theta)\tau} \\ &= \frac{x}{k}\frac{\rho+\delta}{\varepsilon\tau}\left[\alpha + (1-\alpha)\tau - \frac{\alpha\theta(\sigma-\tau)}{\theta\sigma + (1-\theta)\tau}\right] \\ &= \frac{x}{k}\frac{\rho+\delta}{\varepsilon}\left[1-\alpha + \frac{\alpha}{\theta\sigma + (1-\theta)\tau}\right] \\ &= \frac{x}{k}\frac{\rho+\delta}{\varepsilon}(1-\alpha+\phi) \end{aligned}$$

Setter vi dette inn i (C.1), ser vi nå at absoluttverdien til den negative rota er γ som i (4.3) i hovedteksten.

Referanser:

Abel, Andrew (1981): «Dynamic Effects of Permanent and Temporary Tax Policies an a q Model of Investment», *Journal of Monetary Economics*, 353–373.

Akram, Qaisar Farook (2003): «Reell likevektsvalutakurs for Norge», *Norsk Økonomisk Tidsskrift* 117, nr. 2, 89–112.

Barro, Robert J. og Xavier Sala-i-Martin (1999): *Economic Growth*, Cambridge, Mass.: MIT Press.

de Grauwe, Paul (1996): *International Money: Postwar Trends and Theories*, Oxford: Oxford University Press.

Gavin, Michael (1990): «Structural adjustment to a terms of trade disturbance: The role of relative prices», *Journal of International Economics* 28, 217–243.

Gavin, Michael (1992): «Income effects of adjustment to a terms of trade disturbance and the demand for adjustment finance», *Journal of Development Economics* 37:127–153.

Golub, Stephen S (1982): «Oil Prices and Exchange Rates», *The Economic Journal* 93, 576–593.

Hayashi, Fumio (1982): «Tobin's Marginal and Average q: A Neoclassical Interpretation», *Econometrica* 50, 213–224.

Murphy, Robert G. (1988): «Sector-specific capital and real exchange rate dynamics», *Journal of Economic Dynamics and Control* 12, 7–12.

Neary, J. Peter og Douglas D. Purvis (1983): «Real adjustment and exchange rate dynamics», i *Exchange rates and International Macroeconomics*, redigert av J. Frenkel, University of Chicago Press.

Steigum, Erling (1992): «Wealth, structural adjustment and optimal recovery from the Dutch disease», *Journal of International Trade & Economic Development*, 27–40.

Steigum, Erling og Øystein Thøgersen (2003): «Borrow or adjust – Optimal fiscal policy and the speed of sectoral adjustment in an open economy», *International Economic Review* 44, 699–724.