INNHOLD

Side

Artikler:

MARIA SANDSMARK:
Bruk av kooperativ spillteori i praksis 63

ANNE LINE BRETTEVILLE-JENSEN:
Kan økonomisk teori forklare etterspørselen etter avhengighetsgoder? 77

ARNE JON ISACHSEN:
Et passende penge- og valutapolitisk regime 107

GUNNAR BÅRDSEN OG RAGNAR NYMOEN:
Rente og inflasjon 125

Artikkelforfattere i dette nummer 149

English Summary 150

Norsk Økonomisk Tidsskrift 115 (2001) s. 63-76

Bruk av kooperativ spillteori i praksis*

Maria Sandsmark

Sammendrag

Spillteori analyserer situasjoner med konflikt eller samarbeid ved hjelp av matematiske fremgangsmåter. I kooperative spill har spillerne enten strengt identiske interesser eller blandede interesser. Dersom interessene er blandede, må avtaler og andre forpliktelser, samt trusler og løfter, være mulige å håndheve. I kooperative spill med flere enn to aktører kan delgrupper av spillere inngå koalisjoner for å styrke gruppens forhandlingssituasjon. Løsningsforslag i kooperativ spillteori angir fordelinger av den gevinsten som spillerne oppnår gjennom samarbeid. Enkelte empiriske funn viser at noen teoretiske løsningsforslag er realistiske fordelingsprinsipp i praksis.

1 INNLEDNING

Økonomi er et samfunnsfag. Økonomiske teorier handler derfor om menneskers atferd i en eller annen sammenheng. Hensikten med å utvikle teorier kan være et ønske om å forklare observerte fenomener, eller å predikere fremtidig atferd. Spillteori studerer atferd i situasjoner der mennesker må forholde seg til andres handlingsvalg. Det påstås imidlertid ofte at avstanden mellom teori og praksis er stor – at de teoretiske metodene ikke evner å predikere menneskelig atferd.

Temaet for denne artikkelen er bruk av kooperativ spillteori i praksis, og spørsmålet jeg ønsker å belyse er om det finnes empirisk grunnlag for kooperativ spillteori. Sagt på en annen måte: Kjenner man til fordelingsproblem som har blitt løst på måter som samsvarer med de teoretiske løsningsbegrepene, uten at de involverte aktørene hadde kjennskap til analyseredskapene presentert

* Artikkelen er en bearbeidet versjon av forfatterens manuskript til prøveforelesning over oppgitt emne for dr.polit- graden ved Universitetet i Bergen i september 2000. Takk til tidsskriftets redaktør Lars-Erik Borge og en anonym konsulent for nyttige kommentarer og tips til forbedringer.

i den akademiske litteraturen? Det finnes to mulige kilder til slike empiriske observasjoner: Resultat fra virkelige fordelingsproblem og kontrollerte laboratorieeksperiment.

De fleste eksperiment som har hatt som mål å undersøke menneskers atferd i ulike strategiske sammenhenger, har studert situasjoner med to spillere og to strategier, som for eksempel fangenes dilemma spill. For å studere menneskers atferd i situasjoner der det finnes potensielle koalisjonsmuligheter, som i kooperative spill, må imidlertid minst tre personer delta. På tross av den økte kompleksiteten det innebærer å gjennomføre kontrollerte eksperiment med mange aktører, har det siden 60-tallet blitt gjort en del forsøk på å teste kooperative løsningsbegrep. Kontrollerte forsøk kan gi verdifull innsikt, men mange vil nok hevde at den avgjørende testen på om det finnes empirisk grunnlag for en teori, er å undersøke om løsningsbegrepene har evne til å predikere atferden til enkeltindivid og bedrifter som opptrer i sine naturlige omgivelser. Dette krever at beregninger basert på teoretiske løsningsmetoder sammenlignes med faktisk observerte utfall av virkelige problemer.

Planen for artikkelen er som følger.[1] Jeg skal først gi en kort presentasjon av spillteori generelt og deretter trekke en skillelinje mellom kooperativ og ikke-kooperativ spillteori. Videre skal jeg presentere noen sentrale begrep i kooperativ spillteori, og disse er:

- Den karakteristiske funksjonen
- Superadditivitet
- Kjernen
- Shapley verdien
- Nukleolen

De tre siste begrepene er ulike løsningsbegrep. Etter å ha gjennomgått de ovennevnte begrepene, skal jeg presentere to arbeider som på forskjellige måter har dokumenter bruk av kooperativ spillteori i praksis. Det første arbeidet tar utgangspunkt i fordelinger av kostnader i forbindelse med fjorten vassdragsutbygginger utført i USA i tiårsperioden fra 1957 til 1968. Det andre arbeidet har som utgangspunkt et 2000 år gammelt delingsforslag i forbindelse med et insolvent dødsbo.

2 SPILLTEORI

Kort sagt kan vi si at spillteori analyserer situasjoner med konflikt eller samarbeid ved hjelp av matematiske fremgangsmåter. Som metode har spillteori sitt utspring i arbeidet «The Theory of Games and Economic Behavior» av Von

[1] Der annet ikke er nevnt, er fremstillingen basert på arbeidene til Harsanyi (1977), Hermannson (1990) og Maschler (1992).

Neumann og Morgenstern (1944). Generelt består et spill av en mengde spillere, deres mulige strategier og de tilhørende utbyttene. I klassisk spillteori forutsettes det at spillerne er rasjonelle og at de har perfekt informasjon. Informasjonen gjelder spillets regler og spillernes egne og de andre spillernes handlingsalternativ med tilhørende utbytter, se for eksempel Binmore (1992) for flere detaljer.

Vi kan skille mellom tre hovedgrupper av spill:

- Spill hvor aktørene har strengt identiske interesser.
- Spill hvor aktørene har strengt motsatte interesser.
- Spill hvor aktørene har blandede interesser, det vil si at interessene er delvis like og delvis ulike.

I spill med strengt identiske eller blandede interesser har spillerne alltid noen felles målsettinger. Disse målsettingene kan de i prinsippet oppnå ved å bli enige om en gjensidig fordelaktig felles strategi. I spill med strengt motsatte interesser, for eksempel to-person 0-sum spill, vil det ikke være hensiktsmessig å avtale en felles strategi, siden spillerne overhodet ikke har interesser som lar seg realisere gjennom felles avtaler. For spillere med felles målsettinger, vil imidlertid avtaler kun gi mening i praksis dersom spillerne kan være temmelig sikre på at avtalene som inngås er stabile, eller med andre ord, at de vil bli overholdt.

Det er to grunner til at en avtale er stabil. For det første kan den være *selvhåndhevende*. Det innebærer at utbetalingsfunksjonene til spillerne er av en slik art at de gir klare insentiver til å følge den avtalte strategien, i hvert fall så lenge det forventes at de andre gjør det samme. Teknisk sett betyr det at en avtale bare kan være selvhåndhevende dersom den avtalte strategien er et likevektspunkt. Dette er en nødvendig, men ikke en tilstrekkelig betingelse. Det er bare strenge likevekter som alltid vil være stabile. I en streng likevekt har hver spiller brukt en strategi som er det unike beste valget, gitt at motparten bruker tilsvarende strategi, jf. for eksempel Weibull (1996). For det andre kan en avtale være stabil, dersom den *kan* håndheves. Det vil si at spillets regler er slik at avtaler som inngås må holdes, selv om det kan være noe å vinne på å bryte avtalen. I praksis er det flere instanser som gjør at en avtale eller et løfte kan håndheves: Først og fremst er rettsapparatet, de offentlige myndighetene og politiet slike instanser, men også press fra opinionen, prestisje- og troverdighetshensyn, eller moralske holdninger, kan virke stabiliserende. De sistnevnte faktorene kan tolkes som internaliserte sanksjoner mot avtalebrudd.

I et spill med strengt identiske interesser vil alle effisiente avtaler være selvhåndhevende, fordi gjennomføringen av spillet vil innebære å gjøre avtaler om å bruke strategier som korresponderer til et strengt likevektspunkt. I tilfeller med spill hvor det er blandede interesser, skilles det mellom spill hvor spillets regler gjør at avtaler alltid er bindende og håndhevbare, og spill hvor avtaler ikke har noen bindende styrke. Den første typen spill kalles kooperative spill, og den andre typen kalles ikke-kooperative spill.

Kort oppsummert kan vi si at kooperativ spillteori inkluderer spill hvor avtaler og andre forpliktelser, samt trusler og løfter, er mulige å håndheve, mens ikke-kooperativ spillteori inkluderer spill hvor avtaler og forpliktelser *ikke* kan håndheves. Videre er det vanlig å forutsette at spillere i kooperative spill på forhånd, fritt og uten kostnader, kan kommunisere seg i mellom, mens det er fravær av slik kommunikasjon i ikke-kooperative spill. Dermed kan aktørene i kooperative spill lage avtaler om samarbeid. Den enkelte spillers fortjeneste ved et eventuelt samarbeid er derimot ikke gitt i utgangspunktet. Denne må det forhandles om, og her er kilden til konflikt i kooperative spill.

3 KOOPERATIV SPILLTEORI

Dersom et kooperativt spill har flere enn to aktører, kan delgrupper av spillere inngå koalisjoner for å styrke sin egen forhandlingssituasjon i forhold til de andre spillerne. I forhandlingen vil spillerne kreve det som er best for seg, men for å oppnå en gjennomførbar fordeling av samarbeidsgevinsten må spillerne moderere sine krav. Generelt er det slik at det nivået som en spiller realistisk kan kreve i en slik forhandling, vil avhenge av denne spillerens styrke i spillsituasjonen. Forhandlingsstyrke betyr en spillers – eller en koalisjons – evne til bevisst å hjelpe eller skade andre spillere, og til å forsvare seg selv mot trusler fra andre spillere.

I litteraturen fokuseres det i mindre grad på forhandlingsprosessen forut for koalisjonsdannelsen. Det er oftest det samlede utbyttet som hver koalisjon kan oppnå og en rimelig fordeling av dette utbyttet, som er av interesse. Hjørnestenen i kooperativ spillteori er derfor den såkalte karakteristiske funksjonen. Dette begrepet ble først formulert av Von Neumann (1928). Den karakteristiske funksjonen er på en måte en statisk representasjon av den underliggende dynamiske forhandlingsprosessen. Ideen er å samle den potensielle verdien til hver mulig koalisjon av spillere i én enkel numerisk indeks. I et kooperativt spill med N spillere, vil den karakteristiske funksjonen dermed ha $2^N - 1$ antall verdier.

Verdien til en koalisjon kan representere samlet nytte, eller en monetær gevinst, for eksempel i form av en salgsinntekt eller sparte kostnader som medlemmene av koalisjonen sammen kan oppnå uavhengig av spillere utenfor koalisjonen. Dersom verdien til en koalisjon uttrykkes ved et enkelt tall, innebærer det en antagelse om at nytte kan overføres fra en spiller til en annen.

I spill med positive utbytter er det vanlig å anta at den karakteristiske funksjonen er *superadditiv.* Lar vi den karakteristiske funksjonen til et slikt spill betegnes ved v, kan superadditivitet uttrykkes ved følgende ulikhet:

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) \text{ når } S \cap T = \varnothing \quad \text{for alle } S, T \subset N$$

N representerer da mengden av alle spillere, der S og T er to koalisjoner (delmengder) uten felles medlemmer, og $v(\cdot)$ er det maksimale utbyttet (verdien) som medlemmene av en koalisjon kan oppnå dersom de samarbeider.

Superadditivitet innebærer at medlemmene av to koalisjoner kan gjøre det minst like godt ved å slå seg sammen som å opptre hver for seg. Dersom spillerne ikke har noe å tjene på å inngå koalisjoner, noe som betyr at ulikheten holder med likhet, er den karakteristiske funksjonen spillets endelige løsning. Verdien til hver spiller sier da hva spilleren kan forvente å oppnå, dersom spillet spilles optimalt. Slike spill er imidlertid uinteressante, og kalles gjerne ikke-essensielle spill. I essensielle spill er det derimot vanlig å forvente at koalisjonen bestående av alle spillere – altså den store koalisjonen – vil bli dannet. Da gir den karakteristiske funksjonen en første grovskisse til løsning.[2]

Før jeg presenterer tre av de vanligste løsningsbegrepene i kooperativ spillteori, vil jeg presentere et enkelt eksempel på en situasjon som kan analyseres som et kooperativt spill.

3.1 Et eksempel: Jazzbandspill

Tre musikkstudenter; en sanger (*s*), en pianist (*p*) og en trommeslager (*t*), ønsker å spe på studielånet ved å opptre på kveldstid. De undersøker derfor mulighetene for hva de maksimalt kan tjene enten som gruppe, gjennom soloopptredner eller i ulike duo-konstellasjoner. På en nattklubb får de vite at de kan tjene 1.000 kroner pr. kveld, forutsatt at de spiller sammen. Nattklubben kan også godta mindre konstellasjoner, men da må pianisten være med. Sangeren og pianisten blir sammen tilbudt 800 kroner pr. kveld, mens pianisten og trommeslageren sammen kan tjene 650 kroner pr. kveld. Nattklubben er også villig til å betale 300 kroner pr. kveld dersom pianisten opptrer alene. I tillegg er en jazzklubb villig til å betale 500 kroner pr. kveld for en duo med sangeren og trommeslageren, mens sangeren alene vil bli betalt 200 kroner pr. kveld. Trommeslageren er altså den eneste som ikke kan tjene noe på solo-opptredener.

På bakgrunn av denne informasjonen kan vi bestemme den karakteristiske funksjonen til et kooperativt jazzbandspill:

$$v(s) = 200 \qquad v(s, p) = 800$$
$$v(p) = 300 \qquad v(s, t) = 500$$
$$v(t) = 0 \qquad v(p, t) = 650$$
$$v(s, p, t) = 1.000$$

Som nevnt er musikerne interessert i å tjene mest mulig pr. kveld. Dersom sangeren opptrer alene og pianisten og trommeslageren som duo, vil de til sammen tjene 850 kroner (200+650). Lar de pianisten opptre alene på nattklubb, mens sangeren og trommeslageren opptrer som duo på jazzklubb, får de som gruppe til sammen 800 kroner (300+500). Dette beløpet kan imidlertid sangeren og pianisten skaffe seg helt uten hjelp fra trommeslageren. Mest penger, det vil

[2] Leseren henvises til Myerson (1991) og Owen (1982) for en grundig gjennomgåelse av de sentrale begrepene i kooperativ spillteori.

si 1.000 kroner, tjener de ved å opptre som trio. Vi kan derfor gå ut fra at musikerne vil takke ja til å spille sammen på nattklubben. Problemet de tre står overfor er dermed hvordan de skal finne en stabil fordeling av tusenlappen. Hva sier kooperativ spillteori om dette problemet?

4 NOEN VANLIGE LØSNINGSBEGREP

Et løsningsbegrep i kooperativ spillteori er et forsøk på å systematisk predikere hvilken fordeling av den totale samarbeidsgevinsten som vil bli valgt av spillerne, slik at hver spillers utbytte samsvarer med dennes forhandlingsstyrke. Det finnes mange ulike løsningsbegrep i kooperativ spillteori. Noen foreslår en mengde stabile fordelinger, som for eksempel kjernen. Andre metoder angir ett enkelt punkt, og de mest kjente blant disse er *Shapley verdien og nukleolen.* Jeg skal i dette kapitlet kort presentere de tre nevnte løsningsbegrepene.[3]

Løsningsbegrepet kjernen ble introdusert i Gillies (1953). En fordeling i kjernen er Paretoeffektiv, det vil si at hele samarbeidsgevinsten som den store koalisjonen kan realisere, blir fordelt mellom medlemmene. I tillegg oppfyller en kjernefordeling både individuell rasjonalitet og grupperasjonalitet. Dersom spillerne velger en fordeling som ligger i kjernen, vil det altså være slik at ingen enkeltspillere eller koalisjoner av spillere har insentiver til å bryte ut av samarbeidet. Den største fordelen knyttet til en fordeling i kjernen er derfor at den er stabil. Ulempen er at kjernen oftest ikke er entydig, eller verre, at den av og til er tom. Et kjent resultat som tilskrives Bondareva (1962) og Shapley (1967), sier at såkalte balanserte spill ikke har tom kjerne.

I jazzbandspill-eksempelet foran vil for eksempel en kjerneløsning være enhver vektor $x = (x_s , x_p, x_t)$ **s**om samtidig oppfyller følgende betingelser:

$$\begin{aligned} x_s &\geq 200 \qquad & x_s + x_p &\geq 800 \\ x_p &\geq 300 \qquad & x_s + x_t &\geq 500 \\ x_t &\geq 0 \qquad & x_p + x_t &\geq 650 \end{aligned}$$

$$x_s + x_p + x_t = 1.000$$

Fordelingen må være slik at sangeren og pianisten til sammen får minst 800 kroner, sangeren og trommeslageren minst 500 kroner og pianisten og trommeslageren minst 650 kroner. Det betyr at sangeren må ha mellom 300 og 350 kroner, pianisten mellom 450 og 500 kroner og trommeslageren mellom 150 og 200 kroner. Siden kjernen ofte inneholder mange stabile fordelinger, kan løsningen på problemet med å finne en egnet fordeling fortsatt være uklar.[4] Mange foretrekker derfor løsningsmetoder som fremskaffer én enkel fordeling.

[3] For flere detaljer om kjernen, Shapley verdien og nukleolen, samt andre kooperative løsningsbegrep, se Osborne og Rubinstein (1994), Driessen (1988), Moulin (1988) og Shubik (1983).

[4] I Owen (1975) presenteres en metode for å velge ett punkt i kjernen, basert på lineær programmering.

Shapley verdien, som ble introdusert i Shapley (1953), er en slik løsning. Fremgangsmåten for å regne ut Shapley verdien og tolkningen av fordelingen er ikke umiddelbart intuitiv. Som en illustrasjon kan man tenke seg et rom der spillerne blir sluppet inn én etter én til den store koalisjonen er dannet. Hver spillers merbidrag til koalisjonen som allerede er i rommet blir målt for alle mulige rekkefølger. Andelen som en spiller får under Shapley verdien er da denne spillerens gjennomsnittlige merbidrag til den store koalisjonen under tilfeldig rekkefølge. Dersom man bruker Shapley verdien som fordelingsnøkkel i jazzbandspillet, vil sangeren få 350 kroner, pianisten 475 kroner og trommeslageren 175 kroner. I dette tilfellet ligger altså fordelingen i kjernen.

Shapley verdien kan karakteriseres ved tre aksiomer:

- Første aksiom sier at Shapley verdien til en såkalt Dummy er null. En Dummy er en spiller som ikke bidrar til en koalisjons gevinst eller kostnad uansett når spilleren innlemmes i koalisjonen.
- Andre aksiom sier at Shapley verdien til symmetriske spillere er identisk. To spillere er symmetriske dersom Shapley verdien ikke endres selv om de to bytter navn.
- Tredje aksiom sier at additive komponenter kan summeres. Det vil si at dersom et prosjekt både har faste og variable kostnader, og Shapley verdien beregnes for de faste og variable kostnadene hver for seg, vil summen av disse tilsvare Shapley verdien for prosjektets totale kostnader.

Ulempen med Shapley verdien er at den ikke alltid ligger i kjernen. I så tilfelle er fordelingen ustabil. Enkeltspillere eller delgrupper av spillere kan da finne det profitabelt å bryte ut av samarbeidet i den store koalisjonen. På den annen side, dersom et spill er konvekst, vil Shapley verdien alltid ligge i kjernen. Et kooperativt spill er konvekst dersom

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T) \text{ for alle } S, T \subset N$$

eventuelt

$$v(S \cup i) - v(S) \leq v(T \cup i) - v(T) \text{ for alle enkeltspillere } i \in N \text{ og } S \subset T \subset N \setminus i\ .$$

Når et spill er konvekst, vil en spillers marginalbidrag til en koalisjon bli større, jo større koalisjonen er.

Et annen interessant og mye brukt løsningsforslag er *nukleolen*. Begrepet ble introdusert i Schmeidler (1969) og er det leksikografiske minimum av misnøyer. En koalisjons misnøye er differansen mellom det koalisjonen mottar ved et bestemt fordelingsforslag og det den kan oppnå på egenhånd. Potensielle fordelingsvektorer blir ordnet slik at den koalisjonen som har sterkest misnøye står først. Deretter velges den fordelingen som gjør at de verst stilte får det best mulig. Med andre ord, nukleolen er det unike punktet hvor den maksimale misnøyen til enhver koalisjon er minimert. Dersom kjernen ikke er tom, vil nukleolen alltid ligge i kjernen.

Som sagt finnes det også en rekke andre løsningsbegrep i litteraturen, men teorien gir ingen fasit for hvilken løsningsmetode som bør brukes i en gitt situasjon.

5 BRUK AV KOOPERATIV SPILLTEORI I PRAKSIS

Jeg skal i det følgende presentere resultatene fra to arbeider, nemlig Williams (1988) og Aumann og Maschler (1985), som på ulike måter viser at løsninger fremkommet i praksis kan sammenfalle med løsninger foreslått av kooperativ spillteori.

Williams (1988) analyserer fjorten ulike vassdragsutbygginger i USA utført i tiårsperioden fra 1957 til 1968. Felles for alle prosjektene var at utbyggingene hadde fra to til fem ulike formål eller delprosjekter, der de ansvarlige for hvert delprosjekt måtte bli enige om hvordan de totale kostnadene skulle fordeles mellom de ulike formålene. Felles var også det faktum at det var mindre kostbart å gjennomføre én samlet utbygging for alle formålene, fremfor å bygge ut hvert delprosjekt for seg. De viktigste formålene for alle utbyggingene var flomkontroll og produksjon av vannkraft. Ni av de fjorten prosjektene hadde i tillegg navigasjon, irrigasjon, rekreasjon og fauna som ett eller flere mål.

Basert på informasjon om de ulike utbyggingskostnadene, modellerte Williams (1988) et kooperativt spill til hvert av de fjorten prosjektene. Hvert spill hadde et antall spillere som tilsvarte delprosjektene i de respektive utbyggingene. Resultatet ble fem spill med to aktører, to spill med tre aktører, fire spill med fire aktører og tre spill med fem aktører. I tillegg til å beregne ulike kooperative løsninger, deriblant kjernen, Shapley verdien og nukleolen, ble det beregnet fordelinger basert på tradisjonelle regnskapsanalytiske fremgangsmåter.

Analysen hadde til hensikt å belyse tre spørsmål. For det første, vil de observerte (allerede realiserte) fordelingsløsningene til utbyggingsprosjektene ligge i kjernen til de respektive spillene? For det andre, vil de teoretisk beregnede kooperative løsningene predikere de observerte fordelingene mer nøyaktig enn fordelinger beregnet etter tradisjonelle regnskapsregler? Og for det tredje, i en intern sammenligning, hvilke av de kooperative løsningsbegrepene egnet seg best til å predikere de observerte kostnadsfordelingene?

Resultatene fra analysen viste at alle de observerte kostnadsfordelingene fra utbyggingene var å finne i de respektive spillenes kjerne. Gitt at dataene brukt i analysen var korrekte og at den spillteoretiske modelleringen var adekvat, støtter altså de empiriske resultatene kjernen som løsningsbegrep. På spørsmålet om det var de kooperative løsningsforslagene eller de tradisjonelle regnskapsreglene som mest nøyaktig predikerte de faktiske fordelingene, kom resultatene fra den kooperative spillteorien best ut. Et eventuelt motsatt resultat ville for øvrig vært demotiverende for alle som studerer strategisk atferd i situasjoner med fordelingsproblemer. Utenom kjernen ble fire kooperative fordelinger estimert og innbyrdes rangert. Best prediksjonsevne hadde to relativt nye løsningsbegrep som på engelsk kalles «the equal propensity to disrupt method» og «the just payoff vector». Shapley verdien kom på tredjeplass, mens nukleolen gav dårligst prediksjon av de kooperative løsningsmetodene som var med i analysen.

Utgangspunktet for analysen til Aumann og Maschler (1985) er et mye diskutert delingsforslag beskrevet i den 2000 år gamle Babylonske Talmud, et dokument som blant annet danner grunnlaget for jødisk sivil- og straffelov.

I en såkalt Mishna i Talmud, skrevet av Rabbi Nathan, beskrives et fordelingsproblem. Problemet som presenteres er fordelingen av et insolvent dødsbo: En avdød mann etterlater seg tre koner som henholdsvis har krav på 100, 200 og 300 enheter i den avdøde mannens bo. Tre tilfeller blir så vurdert; ett tilfelle der størrelser på boet er 100 enheter, ett der boet er 200 enheter og ett der boet er 300 enheter. I hvert tilfelle har de tre enkene altså krav som samlet overstiger boet. Spørsmålet er da hvordan boet skal fordeles mellom enkene.

En vanlig løsning i moderne lovgivning er å fordele boet proporsjonalt mellom ellers like kreditorer. Da får hver kreditor en andel av boet som tilsvarer sin andel av det totale kravet. En annen mulighet er å fordele boet likt. I Tabell 1 presenteres fordelingene som Rabbi Nathan foreslo for de tre ulike bostørrelsene nevnt ovenfor.

Tabell 1

Krav Boet	100	200	300
100	33⅓	33⅓	33⅓
200	50	75	75
300	50	100	150

Når boet og det minste kravet er likt, altså på 100 enheter, foreslår Rabbi Nathan at boet deles likt mellom enkene, de får dermed 33⅓ hver. I tilfellet der boet har 300 enheter, foreslår Rabbi Nathan at enken som krever 100 får 50 enheter, enken som krever 200 får 100 enheter og hun som krever 300 får 150 enheter av boet. Dette tilsvarer en proporsjonal fordeling. Hva som har vært logikken bak fordelingsforslaget når boet er på 200 enheter, har vært en kilde til diskusjon og uenighet i 2000 år. Forsøkene til tross, det virket umulig å finne en forklaring som på en rimelig måte knyttet forslaget enten til prinsippet om lik fordeling eller til prinsippet om proporsjonal fordeling, langt mindre å finne én

Maria Sandsmark s 63-76 08.01.2002 17:40 Side 72

logisk forklaring som dekket alle tre tilfellene. Noen foreslo derfor at det måtte ha oppstått en trykkfeil i teksten.

Nå burde det ikke være en overraskelse at det har vist seg at kooperativ spillteori kan løse gåten. Aumann og Maschler (1985) beviser nemlig at fordelingene som Rabbi Nathan foreslo samsvarer med nukleolen i et kooperativt spill. Dette spillet er definert ved følgende karakteristiske funksjon:

$v(S) = maks$ {Boet – summen av kravene til medlemmene i mengden $N \setminus S$, 0}

Den karakteristiske funksjonen tilordner til hver koalisjon S boets verdi minus summen av kravene til medlemmene i koalisjonen bestående av alle spillere utenom koalisjonen S. Dersom dette beløpet er negativt, får koalisjonen null. For hver størrelse på boet kan vi altså eksplisitt definere et tilhørende kooperativt spill, der nukleolen i hvert tilfelle er identisk med Rabbi Nathans forslag til fordelinger, jf. tabell 2.

Tabell 2

Boet = 100	$v(1) = 0$	$v(1,2) = 0$	$v(1,2,3) = 100$
	$v(2) = 0$	$v(1,3) = 0$	
	$v(3) = 0$	$v(2,3) = 0$	$x = (33⅓, 33⅓, 33⅓)$
Boet = 200	$v(1) = 0$	$v(1,2) = 0$	$v(1,2,3) = 200$
	$v(2) = 0$	$v(1,3) = 0$	
	$v(3) = 0$	$v(2,3) = 100$	$x = (50, 75, 75)$
Boet = 300	$v(1) = 0$	$v(1,2) = 0$	$v(1,2,3) = 300$
	$v(2) = 0$	$v(1,3) = 100$	
	$v(3) = 0$	$v(2,3) = 200$	$x = (50, 100, 150)$

Ut fra de tre karakteristiske funksjonene i tabell 2 ser vi at når boet er på 100 enheter, har alle lik forhandlingsstyrke. Når boet er på 200 enheter, er enke 1 svakest, mens enke 2 og 3 står likt. I det siste tilfellet er enke 3 sterkere enn enke 2.

Rabbi Nathan hadde selvfølgelig ingen kjennskap til kooperativ spillteori og løsningsbegrepet nukleolen. Hvordan kom han da frem til sine anbefalinger? Aumann og Maschler beviser i sitt arbeid at han kan ha kommet frem til forslagene ved å se etter en løsning som er konsistent for alle koalisjoner bestående av to personer. Fremgangsmåten for å finne slike konsistente fordelinger var allerede tilgjengelig i en annen Mishna i Talmud.

Problemet som beskrives der er fordelingen av et tøystykke, eller et klede: «To personer holder et klede, én krever å få hele, den andre krever halvparten.

Den første tildeles ¾, den andre ¼.» Denne fordelingen tilsvarer hverken lik eller proporsjonal fordeling. Prinsippet bak fordelingen er at den som krever minst, gir halve til den som krever mest. Siden det er den gjenværende halvparten det strides om, deles denne likt, og dermed kommer man frem til fordelingen (¾, ¼).

Prinsippet kan settes opp som et to-persons konkursproblem:

Kreditor 1 skal ha $(E-d_2)_+ + \dfrac{E-(E-d_1)_+ - (E-d_2)_+}{2}$

Kreditor 2 skal ha $(E-d_1)_+ + \dfrac{E-(E-d_1)_+ - (E-d_2)_+}{2}$

E angir konkursboets størrelse og d_1 og d_2 er kravene til kreditor 1 og 2. Uttrykkene er symmetriske. Ser vi på det som kreditor 1 skal ha, angir det første leddet det beløpet som er igjen av boet etter at kreditor 2 har fått sitt krav oppfylt, hvis det er noe igjen i det hele tatt. Det andre leddet uttrykker halvparten av det som er igjen av boet etter at differansen mellom boet og den enes krav og differansen mellom boet og den andres krav er trukket fra.

Denne fremgangsmåten kan også overføres til et generelt konkursproblem med *n* kreditorer. I praksis vil det si at man først rangerer kreditorene etter kravenes størrelse, slik at kreditoren med det minste kravet står først. Dersom boet er lite, fordeles boet likt mellom alle kreditorene til alle har mottatt halvparten av den første kreditorens krav. Kreditor én mottar ikke mer foreløpig. Resten av beløpet blir fordelt mellom de andre, men kun inntil alle har mottatt halvparten av kravet til kreditoren med nest minst krav. Deretter holdes kreditor to utenfor inntil videre. Slik fortsetter det inntil alle, eventuelt, har fått halvparten av sitt krav. Dersom boet er større enn halvparten av det totale kravet, fordeles tap, eller differansen mellom boet og det totale kravet, etter samme resept. Fordelingen som fremkommer er konsistent. En fordeling av et konkursbo med flere enn to kreditorer er konsistent dersom det for alle mulige *par* av kreditorer er slik at beløpet de er tildelt under den store konkursløsningen alltid er identisk med to-person-løsningen. Sagt på en annen måte: Sett at to kreditorer ønsker å dele på nytt summen av det de to mottok i den store fordelingen. En dommer som benytter det Talmudske prinsipp om delingen av et omstridt klede mellom to personer, vil da foreslå en fordeling som tilsvarer det de to hadde i utgangspunktet.

Aumann og Maschler (1985) viser altså at et 2000 år gammelt delingsforslag tilsvarer det kooperative løsningsforslaget nukleolen. Videre viser de at man ikke behøvde å kjenne til kooperativ spillteori for å komme frem til det underliggende prinsippet bak fordelingsforslaget. Det Talmudske prinsipp om delingen av et omstridt klede vil alltid resultere i en unik fordeling for alle konkursbo, og løsningen tilsvarer nukleolen.

6 AVSLUTNING

Som nevnt innledningsvis, vil noen hevde at den avgjørende testen på om en teori har relevans for problemstillinger hjemmehørende i den virkelige verden, er om den kan predikere atferden til enkeltindivid og bedrifter som opptrer i sine naturlige omgivelser. Jeg har i denne artikkelen presentert resultatene fra to arbeider som kan bidra til å gi kooperativ spillteori en positiv attest i så henseende, men litteraturen inneholder relativt få lignende analyser.

Siden virkeligheten er for kompleks til å la seg beskrive fullstendig av en teori, kan forenklende forutsetninger aldri unngås. Urealistiske forutsetninger vil på sin side kunne bidra til å skape avstand mellom teori og praksis. Antagelsen om at forhandlingene i kooperative spill foregår kostnadsfritt er et eksempel på en urealistisk forutsetning. I virkeligheten kan det både være kostnadskrevende og tidkrevende å forhandle. Særlig forhandlinger i spill med tom kjerne kan trekke ut. Muligheten for å samle inn all relevant informasjon kan også være begrenset. Kanskje kjenner ikke spillerne hverandre, eller avstanden mellom dem er stor. Usikkerhet i fremtidig planlegging og asymmetrisk informasjon er også faktorer som kompliserer. Teorien forutsetter i tillegg at alle mulige koalisjoner kan eksistere samtidig. Det er derfor ingen logiske problem knyttet til at en spiller på samme tid kan være medlem av et stort antall ulike og gjensidig overlappende koalisjoner. Det er spillerens egne personlige preferanser som avgjør. Denne antagelsen er ikke urimelig i spill med få aktører, noe man ofte finner i litteraturen. I virkeligheten er det kanskje ganske annerledes. Med mange spillere blir det raskt et stort antall mulige koalisjoner, for eksempel gir 3 spillere 7 potensielle koalisjoner, 10 spillere gir over 1000 potensielle koalisjoner, mens 15 spillere gir nærmere 33.000 potensielle koalisjoner. Det er derfor urealistisk å tenke seg at spillere i virkeligheten på egenhånd vil kunne foreta de nødvendige beregningene når antallet spillere er stort.

Stilt overfor et faktisk fordelingsproblem, vil imidlertid en skolert sosial planlegger – eventuelt en regnskapsfører eller en konsulent – kunne benytte kooperativ spillteori i søken etter en egnet løsning, se for eksempel Tamir (1993), van den Nouweland m.fl. (1996) og Andersen (1998), som analyserer problemstillinger relatert til henholdsvis optimal lokalisering, telekommunikasjon og vannkraftutbygging. Kraftige regneprogram kombinert med effektive algoritmer har også bidratt til å gjøre det mer aktuelt å anvende kooperativ spillteori. Det at løsningsbegrepene hver for seg har ulike egenskaper og oppfyller forskjellige rettferdighetskriterier, jf. Young (1994), har imidlertid blitt brukt som argument mot slike anvendelser. De som leter etter en løsning på et faktisk problem, vil gjerne vite hvilken løsningsmetode som er best, uten å måtte foreta en avveining mellom ulike alternativer. Fornuftige avgjørelser vil derfor kunne kreve betydelige kunnskaper om emnet.

Anvendelser av kooperativ spillteori blir i litteraturen ofte sortert etter felles kjennetegn i ulike klasser av spill, som for eksempel såkalte «Traveling salesman games», «Vehicle routing games» eller «Big boss games», se henholdsvis Potters m.fl. (1992), Göthe-Lundgren m.fl. (1996) og Muto m.fl. (1988).[5] Felles for mange av problemstillingene er at de kan modelleres som et nettverk, der ulike aktører kontrollerer forskjellige deler av nettverket, jf. blant annet Granot og Granot (1992). Eksempler på nettverk kan være veinett, kraftledningsnett, vann- og kloakkledninger, minibanknett og kabel-TV. De nevnte anvendelsene er i all hovedsak relatert til fagfeltet operasjonsanalyse, men også innenfor politisk økonomi og andre disipliner som statsvitenskap og sosiologi, blir kooperativ spillteori benyttet. Fokus er da på konflikt og samarbeid mellom nasjoner, politiske parti eller aktører innenfor ulike politiske grupperinger, se for eksempel spillet om såkalte «utskottsplatser» i Sveriges riksdag presentert i Hermannson (1990).

Referanser:

Andersen, C. (1998): «Fordeling af optimaliseringsgevinst mellem flere aktører», SNF-Rapport 23/98, Stiftelsen for samfunns- og næringslivsforskning, Bergen.

Aumann, R. og M. Maschler (1985): «Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud», *Journal of Economic Theory 36*, 195-213.

Binmore, K. (1992): *Fun and Games*. D. C. Heath, Lexington, Massachusetts.

Bondareva, O. N. (1962): «The core of an n-person game» (på russisk), *Vestnik Leningradskogo Universiteta, Seriia Matematika, Mekaniki y Astronomii 13*, 141-142.

Driessen, T. (1988): *Cooperative Games, Solutions and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Gillies, D. B. (1953): *Some Theorems on n-Person Games*. Ph.D. Thesis. Princeton University Press, Princeton.

Göthe-Lundgren, M., K. Jörnsten og P. Värbrand (1996): «On the nucleolus of the basic vehicle routing game», *Mathematical Programming 72*, 83-100.

Granot, D. og F. Granot (1992): «On some network flow games», *Mathematics of Operations Research 17*, 792-841.

Harsanyi, J. (1977): *Rational behavior and bargaining equilibrium in games and social situations*. Cambridge University Press, Cambridge.

Hermansson, J. (1990): *Spelteorins nytta: om rationalitet i vetenskap och politikk*. Acta Universitatis Upsalensis, Uppsala.

Maschler, M. (1992): «The Bargaining set, Kernel, and Nucleolus», i *Handbook of game theory with economic applications Vol. 1*, Aumann, R. og Hart, S (red.), North Holland, Amsterdam.

Moulin, H. (1988): *Axioms of cooperative decision making*. Cambridge University Press, Cambridge.

Myerson, R. B. (1991): *Game Theory. Analysis of Conflict*. Harvard University Press, Cambridge.

Muto S., M. Nakayama, J. Potters og S. Tijs (1988): «On big boss games», *The Economic Studies Quarterly 39*, 303-321.

Osborne, M. J. og A. Rubinstein (1994): *A Course in Game Theory*. The MIT Press Cambridge, Massachusetts.

Owen, G. (1975): «On the core of linear production games», *Mathematical Programming 9*, 358-370.

Owen, G. (1982): *Game Theory*, 2.utg. Academic Press, New York.

Potters, J. A. M., I. J. Curiel og S. H. Tijs (1992): «Traveling salesman games», *Mathematical Programming 53*, 199-211.

[5] For andre eksempler jf. Driessen (1988) og referansene der.

Schmeidler, D. (1969): «The Nucleolus of a Characteristic Function Game», *SIAM Journal of Applied Mathematics 17*, 1163-1170.

Shapley, L. S. (1953): «A Value for n-Person Games», i *Contributions for the Theory of Games II*, A. Tucker og H. Kuhn (red.). Princeton: Princeton University Press.

Shapley, L. S. (1967): «On balanced sets and cores», *Naval Research Logistics Quarterly 14*, 453-460.

Shubik, M. (1983): *Game Theory in the Social Sciences: Concepts and Solutions*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

Tamir, A. (1993): «On the Core of Cost Allocation Games Defined on Location Problems», *Transportation Science 27,* 81-86.

van den Nouweland, A., P. Borm, W. van Golstein Brouwers, R. Groot Bruinderink og S. Tijs (1996): «A Game Theoretic Approach to Problems in Telecommunication», *Management Science 42*, 294-303.

Von Neumann, J. (1928): «Zur Theorie der Gesellshaftespiele», *Mathematical Annals 100,* 295-320.

Von Neumann, J. og O. Morgenstern (1944): *The Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton.

Weibull, J. W. (1996): *Evolutionary Game Theory*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

Williams, M. (1988): «An empirical test of cooperative game solution concepts», *Behavioral Science 33*, 224-237.

Young, H. Peyton (1994): *Equity: in theory and practice*. Princeton University Press, Princeton.