

Dynamiske CO_2 -avgifter i en endogent bestemt avgiftsperiode. Ikke-lineære effekter*

Sigurd Aanestad^A Leif K. Sandal^B Gerhard Berge^C

Sammendrag

I denne artikkelen presenteres og analyseres en modell for velferdsopptimerende uttak av fossilt brensel i global målestokk. Modellen tar hensyn til forringelsen av miljøet ved bruk og utvinning. Forøvrig er velferds målet knyttet til produsent og konsumentoverskuddet i markedet for fossilt brensel, hvor tilbud/etterspørsel påvirkes av både pris og miljø. Den sosiale planleggeren bruker avgift til å justere omsetningen av fossilt brensel til et velferds maksimerende nivå. Med velferds maksimerende mener vi at det tas hensyn til eksternalitetene i modellen. Ellers er tidsperspektivet uendelig, og vi antar at "ren" teknologi etterhvert blir mer lønnsom enn tradisjonell energiutvinning. Denne rene teknologien gir en alternativ profitt som øker med tiden. Tidspunktet for teknologiskiftet inngår endogent i modellen. I lignende modeller er det vanlig å bruke en lineær funksjon som representant for naturens egen rensning av CO_2 fra atmosfæren. Dette arbeidet har ikke denne begrensningen. Lineær rensfunksjon overvurderer naturens egen evne til å rense opp. Det viser vi ved å demonstrere at en ikke-lineær og ikke-monoton rensfunksjon gir en langt mer restriktiv miljøpolitikk. Modellen løser vi numerisk.

1 INNLEDNING

I de senere tiår har verdenssamfunnet blitt mer og mer bekymret for global oppvarming forårsaket av den såkalte drivhuseffekten. Kyoto-konvensjonen, som trådte i kraft fra 1994, forpliktet de underskrivende land å sette øvre grenser for sine utslipp av CO_2 . Imidlertid har flere land, deriblant Norge, vegret seg for å ratifisere avtalen. USA under George Bush erklærte i 2001 sogar å avvise den grunnet konflikten med økonomisk vekst. I lys av dette kan det være interessant å undersøke nærmere hva som er det optimale utslippsnivået av CO_2 i global målestokk sett fra en sosial planleggers side.

Ettersom bruk og utvinning av fossilt brensel utgjør den betydeligste delen av våre utslipp av CO_2 , har vi valgt å lage en modell der dette representerer hele forurensningen. Vi undersøker virkningen av avgift på forurensende produksjon. Finnes det et avgiftsnivå som gir en optimal

*Takk til alle ved Matematisk institutt, Universitet i Bergen.

^ASigurd Aanestad er cand. Scient. fra Matematisk institutt, Universitet i Bergen, og jobber som stipendiat ved Norges fiskerihøgskule, Universitet i Tromsø.

^BLeif K. Sandal er Dr. Scient fra Matematisk institutt, Universitet i Bergen, og professor ved Institutt for foretaksøkonomi, Norges Handelshøyskole.

^CGerhard Berge er professor emeritus ved Matematisk institutt, Universitet i Bergen.

løsning for samfunnet som helhet når en veier fordeler og ulemper mot hverandre? I vår modell er dette avgiften som maksimerer summen av velferdsoverskudd når det tas høyde for negative velferdsvirkninger av flyt- og oppsamlingseksternaliteter forbundet med utslipp av CO_2 . Den sosialt optimale løsningen sammenlignes med den rene markedsløsningen. På denne måten illustreres effekten av en aktiv miljøbevisst politikk.

En viktig egenskap med modellen er at forurensningen ikke bare påvirker gjennom eksternalitetene. Vi åpner i tillegg for at tilbud og etterspørsel er direkte påvirket av dens akkumulerte nivå. Dermed kan vi ta høyde for kundepreferanser som miljøbevissthet i markedet. Likeledes tenker vi oss at kostnader knyttet til produksjon kan endres av forurensningen. Dette kan for eksempel være kostnader grunnet strengere krav til rensning.

I eksisterende økonomisk litteratur antas stort sett en lineær rensfunksjon. (Vellinga og Witthagen (1996) og Tahvonen (1997)). Denne antagelsen reduserer de matematiske utfordringene når en skal finne et optimalt skattnivå, men gjør også modellene mindre realistiske. Dersom rensfunksjonen virkelig var lineær, ville uendelig stor forurensning også gitt uendelig renssevne. Virkeligheten er mindre rosenrød. Mye tyder på at rensfunksjonen ikke bare flater ut, men også avtar og går helt i null for høye forurensningsnivå. Dette betyr at scenarier med irreversibel forurensning ikke kan utelukkes.

Farzin og Tahvonen (1996) modellerer rensfunksjonen ved å anta to typer karbonbeholdninger i atmosfæren. En type med lineær rensning og en type som naturen ikke klarer å rens. På denne måten mener de å fange opp forventede ikke-lineære egenskaper med den virkelige rensfunksjonen. Dessuten har Tahvonen og Salo (1996) gitt ut en artikkel der forurensningen er skapt ved uttak av en fornybar ressurs. Her er rensfunksjonen gjort mer realistisk ved at den er strengt økende og konkav for lave forurensningsnivåer og avtagende og konveks for høye nivåer. Denne rensfunksjonen er ikke definert eksplisitt. I stedet er den gitt som en generell funksjon med de ønskede egenskaper.

Foruten de allerede nevnte arbeidene er Sandal og Steinshamn (1998, 2000, 2001) og Sandal, Steinshamn og Grafton (2003) blant dem som har jobbet med modeller der det åpnes for ikke-lineære tilnærminger til rensfunksjonen.

Vi bruker i dette arbeidet en ikke-lineær rensfunksjon. Den øker med forurensningen for lave akkumulerte verdier, men når en topp og avtar deretter mot null for høy verdier. Etter å ha antatt en slik form kalibrerer vi rensfunksjonen basert på historiske data for utslipp av CO_2 og for aggregert mengde i atmosfæren. I tillegg sammenligner vi med en lineær estimering basert på de samme data.

Flere har påpekt at like viktig som avgiftsstørrelsen er utviklingen over tid - om avgiften er avtagende eller økende. (jfr. Ulph og Ulph (1994) og Sinclair (1994)). I denne sammenheng er en realistisk rensfunksjon avgjørende. Dessuten er det svært viktig at man tar hensyn til at fossilt brensel er en ikke-fornybar ressurs som bare kan "høstes" i et endelig tidsperspektiv. Mange tar ikke dette hensynet. Da kan de anta at CO_2 -nivået utvikler seg mot en likevekt der tilførselen av ny forurensning er lik renssevnen fra naturen. (Nordhaus (1982) og Stollery (1998)).

Selv om optimeringsproblemet i vår modell har et uendelig tidsperspektiv, utvinnes der bare fossilt brensel i et begrenset tidsrom. Vi tenker oss at en alternativ ren energikilde etterhvert overtar. Profitten ved uttak av denne alternative energikilden er ikke konstant. I stedet åpnes det for at teknologiske fremskritt gir rom for høyere og høyere profitt ved bruk av ren teknologi. Vi kjenner ikke til at tidsavhengig alternativ teknologi har blitt behandlet i litteraturen tidligere.

Tidspunktet for teknologiskiftet, $t = T$, finnes endogent i modellen vår. I T er der to muligheter. Enten har optimal politikk vært å bruke opp hele ressursen av fossilt brensel, eller så er der fremdeles mer igjen. Matematisk vil vi behandle dette som to adskilte tilfeller.

I tilsvarende publiserte modeller antar man typisk T som en eksogen størrelse fordi det gjør

modellene betydelig enklere. (Se f.eks. Ulph og Ulph (1994)). I forhold til våre resultater kan avgiftsprofil og uttaksnivå av fossilt brensel endres vesentlig som følge av en slik forenklingen. Relativt små endringer i modellstørrelser, f.eks. funksjonen for etterspørsel etter fossilt brensel, kan gi svært stor endring i T når denne størrelsen finnes endogen. Dette er hovedårsaken til at vi behandler T som en endogen størrelse.

2 MODELLEN

2.1 Generelle betraktninger

Nytten i modellen er knyttet til velferdsoverskuddet i markedet for fossilt brensel. For å maksimere dette overskuddet korrigeres markedet for alle flyt- og oppsamlingseksternaliteter. Med flyteksternaliteter mener vi i denne sammenheng de umiddelbare miljøkostnader forbundet med bruk og utvinning av fossilt brensel. Et eksempel kan være forringet luftkvalitet i nærheten av industriell virksomhet der det nyttes fossilt brensel. Oppsamlingseksternalitetene representerer de samfunnsmessige kostnader ved at utslipp i dag lagres i atmosfæren og får virkninger også for fremtiden.

Vi lar $y(t)$ være uttak av fossilt brensel ved tidspunkt t , mens $a(t)$ betegner akkumulert CO_2 -nivå i atmosfæren og $s(t)$ er den gjenværende mengden fossilt brensel i naturen¹. Videre lar vi den inverse etterspørselskurven $P(a, y)$ representere samfunnets etterspørsel etter fossilt brensel. Dette tenker vi oss som en ikke-separabel funksjon på formen $P(a, y) = p_0(a) - p_1(a)y$. (Se fig. 1). Legg merke til at denne kurven har generell a -avhengighet. Dermed åpner vi for at miljøhensyn kan påvirke verdensmarkedets etterspørsel etter fossilt brensel.

Når det gjelder kostnadskurven/tilbudskurven har vi valgt å skille mellom privat kostnad, $C_p(a, y)$, og sosial kostnad, $C_s(a, y)$. Den private kostnadskurven omfatter bare kostnader som direkte vedrører produsenten/ressursuttakeren i markedet, mens den sosiale kostnadskurven også inkluderer flyteksternalitetene i modellen.

Oppsamlingseksternalitetene representeres av skadefunksjonen $D(a)$. ($D(0) = 0$, $D' > 0$ og $D'' > 0$ for $a > 0$). Uttakerne av ressursen er bare opptatte av å maksimere produsentoverskuddet (PS), og er derfor blinde for de velferdsdpendende faktorene (utslipp/forurensning) knyttet til uttaket y . Vi kan heller ikke forvente at samfunnets etterspørsel skal gjenspeile alle de negative sider ved bruken av ressursen. Derfor tenker vi oss at en sosial planlegger justerer markedslivekten slik at den utgjør et sosialt optimum når det tas hensyn til flyt- og mengdeeksternalitetene.

Den dynamiske utviklingen av tilstandsvariablene a og s , styres av y . Vi tenker oss at utslippene til atmosfæren er proporsjonale med y . Dessuten påvirkes dynamikken av rensesfunksjonen, $f(a)$. Denne funksjonen kan vi se på som naturens egen nettorensning av CO_2 fra atmosfæren. Den skal være økende for lave a -verdier, men når en topp ved et visst nivå. For veldig høye a -verdier antar vi at rensingen avtar konvekst mot null. Dette åpner for scenarier med irreversibel forurensning.

Tilstandsligningene er gitt ved ²

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{a} &= \mu y - f(a), & \mu > 0 \\ \dot{s} &= -y. \end{aligned}$$

Vi antar at ressursen med fossilt brensel før eller siden brukes helt opp eller blir ulønnsom, og at en ny ren teknologi overtar. I denne siste perioden blir tilstandsligningene våre på formen

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{a} &= -f(a) \\ \dot{s} &= 0, \end{aligned}$$

¹ I fortsettelsen vil det være underforstått at $a = a(t)$, $y = y(t)$ og $s = s(t)$.

² Prikk over a og s markerer her tidsderivate.

mens vi tenker oss velferden som differansen mellom en kjent "profittfunksjon" $\widehat{\pi}(t)$ og skadefunksjonen $D(a)$.

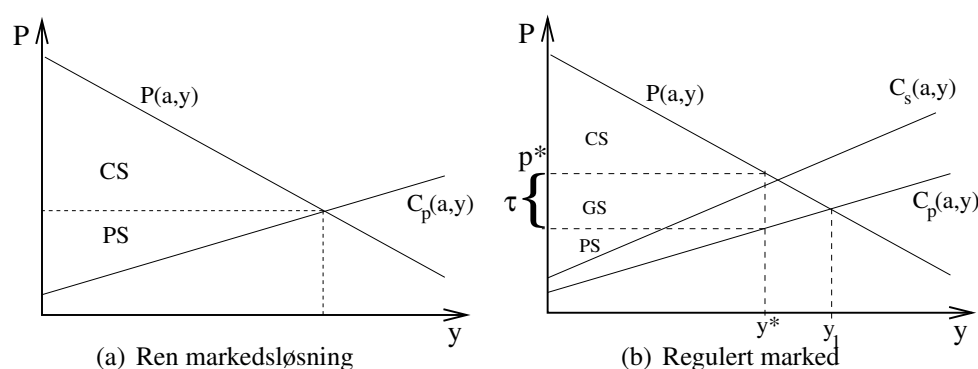
2.2 Uregulert markedsløsning

I den uregulerte markedsløsningen blir markedsoverskuddet fordelt i sin helhet mellom produsenter og konsumenter, og vi kan se bort ifra både flyt- og oppsamlingseksternaliteter. Det vil si at uttaket y vil være bestemt av a i henhold til markedlikevekten $P(a, y) = C_p(a, y)$. Fig. 2(a) illustrerer denne likevekten, som er dannet av den private kostnadskurven og etterspørselskurven.

Denne løsningen av modellen er ikke sosialt optimerende. Oppsamlingseksternaliteten, $D(a)$, og flyteksternalitetene, som inkluderes i den sosiale kostnadskurven, $C_s(a, y)$, berører ikke markedsaktørene.

Uten en aktiv skattepolitikk er eneste miljøhensyn i modellen a -avhengigheten i kostnads- og etterspørselsfunksjoner. Teknologiskiftet kommer enten fordi de samlede ressurser av fossilt brensel er oppbrukt, eller fordi markedsaktørenes profitt ved ren teknologi blir større enn ved tradisjonell teknologi.

Figur 1. Sosialt optimum, (y^*, P^*) . Skatten τ forskyver likevekten fra $(y_1, P(a, y_1))$ til (y^*, P^*) .



2.3 Regulert markedsløsning

Ved hjelp av skatt kan den sosiale planleggeren korrigere markedlikevekten slik at den tar hensyn til både flyt- og oppsamlingseksternaliteter og blir sosialt optimerende. Dersom markedlikevekten i utgangspunktet ligger i skjæringspunktet mellom $P(a, y)$ og $C_p(a, y)$, flytter Pigou-skatten

$$(3) \quad \tau(a, y) = P(a, y) - C_p(a, y)$$

likevekten mot venstre til det sosialt optimale nivået (y^*, P^*) . Vi ser av fig. 2(b) at dette punktet ligger noe til venstre for skjæringspunktet mellom den sosiale kostnadskurven og etterspørselskurven. Årsaken er at vi har valgt å ikke ta med oppsamlingseksternalitetene i den sosiale kostnadskurven. Disse representeres istedenfor av skadefunksjonen, $D(a)$. Den sosiale kostnadskurven skiller seg bare fra den private kostnadskurven ved at den inkluderer flyteksternalitetene. På grunn av manglende viten om hvordan disse størrelsene oppfører seg i virkeligheten, nøyer vi oss med å tilnærme dem lineært. Vi setter

$$C_p(a, y) = c_{0p}(a) + c_{1p}(a)y$$

$$C_s(a, y) = c_{0s}(a) + c_{1s}(a)y.$$

Uten skadefunksjonen ville markedslikevekten vært gitt ved skjæringspunktet mellom den inverte etterspørselskurven og den sosiale kostnadskurven. (Se fig.2(b)). Arealet mellom $P(a,y)$ og $C_s(a,y)$ ville da utgjort flyten av velferdsoverskudd i markedet for fossilt brensel. Dette arealet representerer vi som

$$(4) \quad \pi(a,y) = \int_0^y [P(a,x) - C_s(a,x)] dx = \beta(a)y - \gamma(a)y^2, \quad \beta, \gamma > 0,$$

hvor

$$(5) \quad \beta(a) = p_0(a) - c_{0s}(a) \quad \text{og} \quad \gamma(a) = \frac{1}{2}[p_1(a) + c_{1s}(a)].$$

Den sosiale planleggeren tar hensyn til oppsamlingseksternaliteter representert ved skadefunksjonen $D(a)$. Målet er å maksimere summen av $PS + CS + GS$.³ I appendiks A.1 viser vi at summen av $PS + CS + GS = \pi(a, y^*) - D(a)$.

Dersom vi lar $\Phi(a(T), T) \equiv \int_T^\infty e^{-rt} [\widehat{\pi}(t) - D(a)] dt$, kan vi formulere vårt optimeringsproblem som et en-periode-problem med "skrapverdi". Neddiskontert velferdsmaksimum er da gitt ved

$$(6) \quad \max_{y,T} \left\{ \int_0^T e^{-rt} [\pi(a,y) - D(a)] dt + \Phi(a(T), T) \right\}$$

under bibetingelse

$$(7) \quad \begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - f(a) \\ -y \end{bmatrix}, \quad \text{når } t < T.$$

I forhold til ligning (1) har vi her skalert både y og s slik at parameteren μ får verdien 1, og kan ignoreres. Dette betyr at fossilt brensel måles i hvor mye CO_2 det skaper. Skattnivået som korresponderer med det optimale uttaksnivået y^* blir da $\tau(a, y^*) = P(a, y^*) - C_p(a, y^*)$, mens tilhørende ad-valorem skatt blir:

$$(8) \quad \theta(a, y^*) = \frac{P(a, y^*) - C_p(a, y^*)}{C_p(a, y^*)}.$$

Maksimeringsproblemet i (6) og (7) kan formuleres to-periodisk med y som enslig kontrollvariabel. Nåverdi-hamiltonfunksjon blir da⁴

$$(9) \quad \mathcal{H}(a, y, t) = \begin{cases} \pi(a, y) - D(a) + m(y - f(a)) - ny, & t \leq T \\ \widehat{\pi}(t) - D(a) - mf(a), & t > T, \end{cases}$$

med tilhørende første ordens betingelser:

$$(10) \quad \dot{m} = rm - \mathcal{H}_a$$

$$(11) \quad \dot{n} = rn - \mathcal{H}_s$$

$$(12) \quad \mathcal{H}_y = 0,$$

der $m(t)$ er skyggepris (kofaktor) for a og $n(t)$ er skyggepris for s . Vi refererer til (10) og (11) som henholdsvis kofaktor 1 og kofaktor 2, mens (12) er kravet for indre optimum.

³ GS (Government Surplus) er noe misvisende i denne sammenheng ettersom vi ser på uttak av fossilt brensel i global - ikke nasjonal - målestokk. PS og CS representerer henholdsvis produsent- og konsumentoverskudd.

⁴ Prinsippene for optimal kontrollteori kan f.eks finnes i Kamien og Schwarz (1991).

Når det gjelder transversalitetsskravene til maksimeringsproblemet (6) og (7), blir transversalitetsskravet svarende til at ressursen er endelig⁵

$$(13) \quad n(T)s(T) = 0, \quad s \geq 0, \quad n(T) \geq 0.$$

*Filipov-Cesaris eksistensteorem*⁶, garanterer eksistens av en optimal løsning for problemet vårt. (Se appendiks A.2). En formulering av hvordan vi har løst optimeringsproblemet vårt følger i appendiks A.3.

3 NUMERISKE EKSEMPLER

Før vi presenterer numeriske løsninger av modellen, skal vi gjøre noen spesifikasjoner over aktuelle modellstørrelser. Forurensningen, a , måles i gigatonn CO_2 , og vi har valgt å gjøre skaleringen $a \rightarrow a - \tilde{a}$, der $\tilde{a} = 2187$ er pre-industrielt a -nivå. Dette er fornuftig fordi CO_2 -nivået i atmosfæren var relativt stabilt før den industrielle revolusjon, iallfall mellom istidene. Dessuten er skaleringen hensiktsmessig i definisjonen av rensfunksjonen. Denne er valgt på en form som hovedsakelig representerer en forskjøvet normalfordeling. Vi har satt

$$(14) \quad f(a) = k_1 \max\{0, e^{-k_2(\frac{a}{\hat{a}}-1)^2} - e^{-k_2}\},$$

der \hat{a} er topp-punktet for $f(a)$. Dette er gitt verdien $\hat{a} = 625$.

Legg merke til at $f(0) = 0$. Dette oppnådde vi ved skaleringen av parameteren a . Konstantene k_1 og k_2 er funnet ved kalibrering av rensfunksjonen med data for atmosfærisk CO_2 -nivå og tilsvarende utslipp.⁷ Resultatet ble $k_1 = 10.885$ og $k_2 = 2.610$. Her måles k_1 og $f(a)$ i gigatonn CO_2 pr. år, mens k_2 er dimensjonsløs. (Se tab. 2 for en oversikt over dimensjonene til alle størrelsene i modellen). Verdien $\hat{a} = 625$ kan kanskje kritiseres for å være noe pessimistisk ettersom det følger at dagens forurensning, $a_0 = 625$, utgjør maksimum for rensfunksjonen. De nyeste dataene som er tilgjengelige underbygger likevel vår modellering. De viser at oppsamling av CO_2 i atmosfæren har aksellerert de siste årene samtidig som utslippene har flatet ut. Dette tyder på at naturens egen rensning er svekket og passer veldig godt med vår antagelse om en rensfunksjon som er avtagende for forurensningsnivåer høyere enn vår a_0 -verdi. Rensfunksjonen vi har brukt gir mindre og mindre rensning dess mer a stiger når $a > a_0$. Når a passerer $2\hat{a} = 1250$ vil den opphøre helt. Da får vi irreversibel forurensning. Et slikt verste utfall-scenario kan ikke avvises fra et biologisk ståsted.

Virkninger av den ikke-lineære rensfunksjonen skal vi i avsnitt 3.2 sammenligne med virkningene av en lineær tilnærming som er kalibrert med de samme data. I de andre avsnittene undersøker vi bare den ikke-lineære tilnærmingen.

Vi fant følgende lineære tilnærming:

$$(15) \quad f_{lin}(a) = 0.017a.$$

Skadefunksjonen er i likhet med rensfunksjonen en veldig usikker størrelse. Denne skal gi et økonomisk mål (NOK) på de negative ringvirkninger av oppsamling av CO_2 i atmosfæren. Vi har valgt å følge Sandal og Steinshamn (2000), som brukte

$$(16) \quad D(a) = \frac{a^2}{100000}.$$

⁵ En mer generell diskusjon av transversalitetsskrav finner man i Seierstad og Sydsæter (1987) og Kamien og Schwarz (1991).

⁶ Se Seierstad og Sydsæter (1987).

⁷ Data for atmosfærisk CO_2 -nivå og data for historiske utslipp er tilgjengelige på henholdsvis <http://cdiac.esd.ornl.gov/ftp/maunaloa-co2/maunaloa.co2> og <http://cdiac.esd.ornl.gov/ftp/ndp030/global00.ems>.

Denne funksjonen har de ønskelige egenskapene $D(0) = 0$, $D' \geq 0$ når $a > 0$ og $D'' > 0$.

For den tidsavhengige alternative profitten benytter vi

$$(17) \quad \widehat{\pi}(t) = 140 - 70 \cdot e^{-0.07t}.$$

Vi tenker oss dermed en alternativ teknologi som utvikler seg veldig fort i begynnelsen, men etterhvert tar ut hele sitt potensiale og stabiliserer seg mot $\lim_{t \rightarrow \infty} \widehat{\pi}(t) = 140$. Det må understrekes at både $\widehat{\pi}(t)$ og $D(a)$ er høyst usikre størrelser. Det gjenstår mye økonometri og dataanalyse før vi får full klarhet i disse. Det ligger imidlertid utenfor dette arbeidet, hvor hovedfokus er å studere mulige effekter av en ikke-lineær rensfunksjon. Man skal derfor ikke overdrive vektleggingen av parameterstørrelser og enheter. At $D(a)$ og $\widehat{\pi}(t)$ måles i NOK pr. tidsenhet, mens $t = 1$ tilsvarer ett år, er av mindre betydning enn modellens prinsipielle elementer.

Vi har i modellen vår antatt generell a -avhengighet i markedet for fossilt brensel. Dermed gis det rom for at miljøbevissthet blant forbrukerne kan påvirke etterspørselen. Et tilfelle uten a -avhengighet og et tilfelle med a -avhengighet undersøkes. Disse sammenlignes i seksjon 3.1. I de andre seksjonene undersøker vi bare a -avhengighet.

I tilfellet med a -avhengighet satte vi $p_0(a) = 16 - 0.0012 \cdot a$. Da er $p_0(a_0) = 15.25$, som er nesten lik verdien i tilfellet med p_0 konstant lik 15.3. Dette er ingen sterk avhengighet for den inverse etterspørselen $P(a, y) = p_0(a) - p_1(a)y$, men vi skal se at den likevel får en del å si for a og T .

Det kan være verdt å legge merke til at vi har valgt C_{0p} som en egen enhet (jfr. tab. 2) og satt $C_{0p} = C_{0s} = 1$ i tab. 1. Uten skaleringen $\mu = 1$, (jfr. ligning (1) og (7)), ville enheten C_{0p} ha tilsvart prisen på den billigste oljen verdensmarkedet er i stand til å produsere. Vi nøyer oss med at C_{0p} er proporsjonal med denne prisen.

Vi har satt diskontering $r = 0.05$ dersom annet ikke er spesifisert. De andre parametrene for etterspørsels- og kostnadskurver finner vi i tab. 1. Disse er usikre ettersom mye økonometri og dataanalyse mangler.

Tabell 1. Benyttede verdier for parameterne i etterspørsels- og kostnadsfunksjonen.

Markedsliekevt	Parameter	verdi	parameter	verdi
avhengig av a	p_0	$16 - 0.0012 \cdot a$	p_1	0.6
uavhengig av a	p_0	15.3	p_1	0.6
	c_{0s}	1	c_{1s}	0.09
	c_{0p}	1	c_{1p}	0.02

Tabell 2. Enheter for parametere og funksjoner.

Parameter	enhet	funksjon	enhet
$[a], [s]$	Gt. CO_2	$f(a)$	Gt. CO_2 /pr. år
$[y], [k_1]$	Gt. CO_2 pr./år	$D(a)$	NOK/pr. år
$[c_{0p}(a)], [c_{0s}(a)], [p_0(a)]$	$C_{0p}(a)$	$[\pi(a, y)]$	NOK/pr. år
$[c_{1p}(a)], [c_{1s}(a)], [p_1(a)]$	$C_{0p} \cdot \text{år/Gt. } CO_2$	$[\widehat{\pi}(t)]$	NOK/pr. år
$[\theta], [k_2]$	dimensjonløs	$[\phi(a(T), y(T))]$	NOK

3.1 Regulert versus uregulert markedsløsning

I denne seksjonen skal vi fokusere på virkningen av eksternalitetene i modellen. Det vil si at vi skal sammenligne den uregulerte markedsløsningen med den regulerte. Samtidig ser vi også på virkningen av at etterspørselen gjøres negativt korrelert med akkumulert forurensning. Dette kan vi kalle idealistisk marked.

La oss først konsentrere oss om virkningen av å regulere markedet med skatt eller avgift. Skatten, som viser seg å ligge mellom 130 og 160 % over uregulert markedspris, får store konsekvenser i dette numeriske eksempelet. I fig. 3(a) og 3(b) gir et uregulert marked irreversibel forurensning. Dette ser vi fordi den akkumulerte forurensningen ikke avtar etter teknologiskiftet. Istedenfor stabiliseres den på et veldig høyt nivå. Denne egenskapen ville modellen vår ikke fanget opp dersom rensefunksjonen var lineær. Det at vi har antatt dagens nivå for rensning som det maksimale, gjør at virkeligheten kan komme til å se noe lysere ut enn i vår numeriske beregning, men det er ikke gitt at vårt anslag for rensefunksjonen er for pessimistisk.

Tab. 3 viser at tiden frem til teknologiskiftet forlenges kraftig når markedet er uregulert. Særlig i tilfellet der etterspørselskurven ikke er a -avhengig. Da brukes ressursen av fossilt brensel opp, og som en konsekvens av dette blir ikke teknologien ren før etter over 300 år. Med a -avhengighet kommer teknologiskiftet allerede etter 53 år. Dermed ser vi at forbrukernes miljøbevissthet kan ha veldig mye å si. Vi registrerer også at uten a -avhengighet så er forurensningen ved teknologiskiftet nesten 5 ganger høyere for det uregulerte tilfellet enn for det regulerte. Dessuten legger vi merke til at $y(0) = y(T)$ for tilfellet uten a -avhengighet i den rene markedsløsningen.

For en sosial planlegger kan det på tab. 3 og fig. 2 se ut som betydningen av miljøbevissthet i markedet er mindre enn for det uregulerte markedet. Vi kan forstå dette som at planleggerens skatter gjør markedets bevissthet mindre nødvendig, og de negative konsekvensene av forurensningen blir i dette tilfellet ikke så store fordi forurensningen begrenses av skatten som blir pålagt. Studerer vi imidlertid fig. 3(a) og 3(b) nøye, ser vi at miljøbevisstheten likevel har stor betydning. I det "idealistiske" tilfellet har a -kurven en spiss topp - det vil si at den avtar fort etter teknologiskiftet. Årsaken er at forurensningen på sitt høyeste nivå ikke er høyere enn at naturens rensning fremdeles bidrar vesentlig. Uten a -avhengighet blir imidlertid a -kurven mye flatere. Dette fordi stor forurensning har svekket naturens egen renssevne så mye at teknologiskiftet i første omgang bare utløser en beskjeden reduksjon i akkumulert forurensning.

I de neste seksjonene vil vi la etterspørselen være a -avhengig.

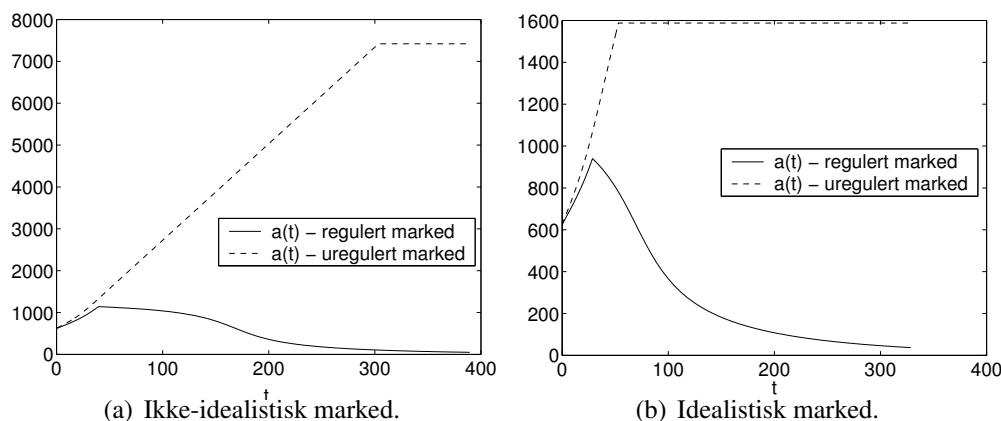
Tabell 3. Randstørrelser i regulert/uregulert marked. Konstant/ a -avhengig etterspørsel.

Marked	etterspørsel	$y(0)$	$y(T)$	$a(T)$	$s(T)$	T	$\theta(0)$	$\theta(T)$
Uregulert	konstant	23.065	23.065	7419.04	0	303.497	0	0
	a -avhengig	22.984	21.121	1587.6	5826.19	53.002	0	0
Regulert	konstant	20.006	19.825	1140.31	6216.26	39.505	1.3542	1.4383
	a -avhengig	19.459	19.451	940.03	6447.26	28.569	1.5733	1.3049

3.2 Lineær versus ikke-lineær rensefunksjon

I denne seksjonen skal vi se hvilken betydning formen på rensefunksjonen har for optimeringsproblemet vårt. Vi tester den ikke-lineære formen (14) mot den lineære (15).

Forskjellen i virkninger av lineær og ikke-lineær rensefunksjon illustreres kanskje best i det uregulerte tilfellet. Dersom vi betrakter a -kurvene for dette tilfellet i fig. 3, ser vi at det tar relativt lang tid før teknologiskiftet finner sted slik at forurensningen er svært høy. I tilfellet med lineær rensning (fig. 4(a)) avløses skiftet i teknologi umiddelbart av en sterk nedgang i akkumulert

Figur 2. Akkumulert forurensning. (Gt. CO₂). Regulert versus uregulert marked.

forurensning. Dette fordi antagelsen om lineær rensning gir svært optimistiske rensverdier for høye forurensningsnivå. I motsetning ser vi at langt lavere rensning for høye a -nivå i det ikke-lineære tilfellet gir irreversibel forurensning.

En interessant egenskap ved linearitet, som er særlig tydelig i det uregulerte markedet, er at etterhvert som tiden går flater den akkumulerte forurensningen ut. Årsaken er at rensningen øker lineært med forurensningen. Dermed er vi i en slags “likevekt” med svært store utslipp og svært stor forurensning. (Se fig. 4(a)). I vårt numeriske eksempel kommer teknologiskiftet som et resultat av at den alternative rene teknologien blir den mest lønnsomme, men dersom vi hadde endret litt på modellparameterne kunne skiftet kommet på grunn av knapphet på fossilt brensel.

I det regulerte markedet ser vi en mer moderat virkning av ikke-linearitet. Tendensene er likevel de samme. Ikke-lineariteten fremskynder teknologiskiftet kraftig, og de fremtidige skadevirkninger av forurensningen er større fordi anslagene for naturens renssevne er mer pessimistiske.

Når det gjelder skattetrykket ser vi i fig. 4 at dette blir noe større i det ikke-lineære tilfellet. Forskjellene er imidlertid ikke dramatiske. Initielt er skatten henholdsvis 138 % og 157 %, mens den for begge tilfellene er konkav frem til teknologiskiftet og da har gått betydelig ned.

Tabell 4. Randstørrelser. Lineær versus ikke-lineær rensfunksjon.

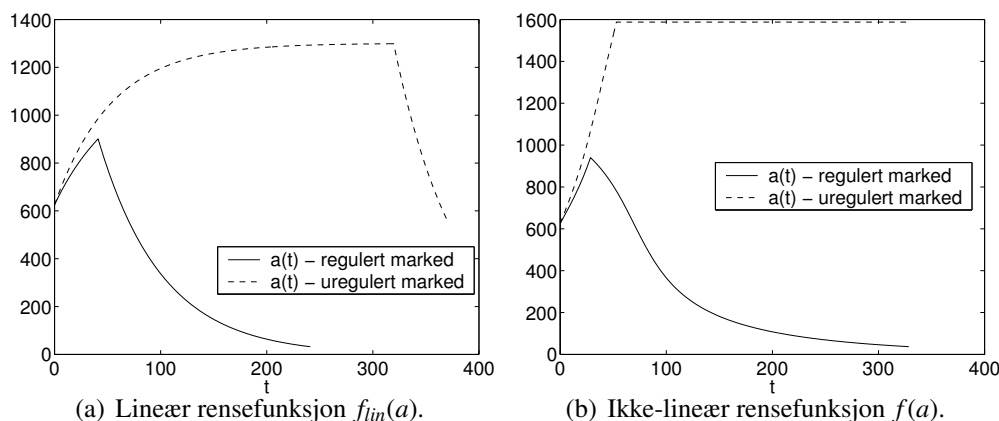
Marked	Rensfunksjon	$y(0)$	$y(T)$	$a(T)$	$s(T)$	T	$\theta(0)$	$\theta(T)$
Uregulert	Lineær	22.984	21.680	1298.88	1357.23	319.700	0	0
	Ikke-lineær	22.984	21.121	1587.6	5826.2	53.002	0	0
Regulert	Lineær	19.857	19.858	901.26	6190.60	41.070	1.3876	1.1497
	Ikke-lineær	19.459	19.451	940.03	6447.26	28.569	1.5733	1.3049

3.3 Virkning av diskontering

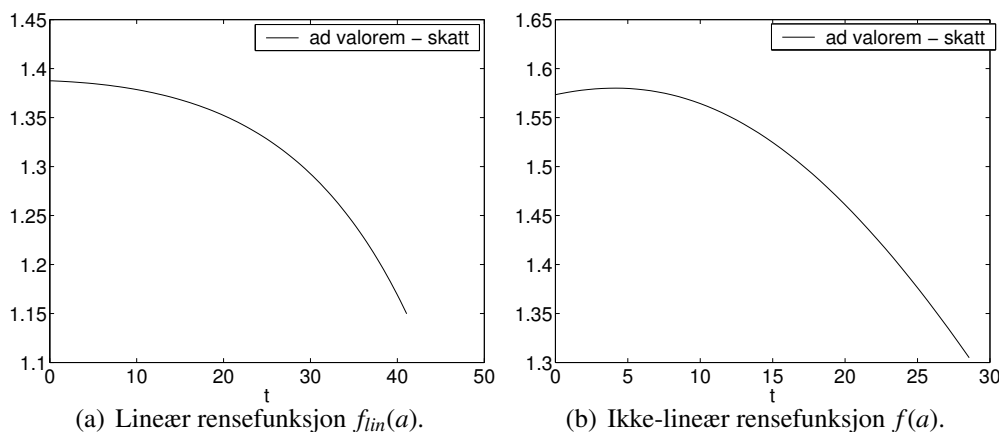
Vi skal nå se hvilken innvirkning diskonteringen, r , har for modellen vår. Dette tester vi bare ut for den regulerte markedsløsningen ettersom diskonteringen ikke har noe å si når markedet er uregulert. (Se seksjon 2.2). Særlig skal vi konsentrere oss om sammenhengen mellom diskontering og skatt.

Vi ser av tab. 5 at forurensning og uttaksperiode stiger klart med økende diskonteringer. I tillegg ser vi at initielt uttak øker tydelig, mens uttaket like før teknologiskiftet er noe mindre

Figur 3. Akkumulert forurensning. (Gt. CO₂).



Figur 4. Ad-valorem skatt, $\theta(t)$. (Skatteprosent = $\theta \cdot 100\%$)



følsomt. Dette er slik vi på forhånd kunne forvente ettersom diskonteringen øker betydningen av umiddelbar profitt.

Tabell 5. Randstørrelser. Diskonteringens virkning i to typer marked.

Marked	Diskontering	y(0)	y(T)	a(T)	s(T)	T	$\theta(0)$	$\theta(T)$
reg- ulert	$r = 0.01$	18.2161	19.1623	850.75	6558.92	23.71	2.1666	1.5171
	$r = 0.03$	18.9675	19.3353	898.60	6497.02	26.41	1.8053	1.3945
	$r = 0.05$	19.4586	19.4507	940.03	6447.26	28.57	1.5733	1.3049

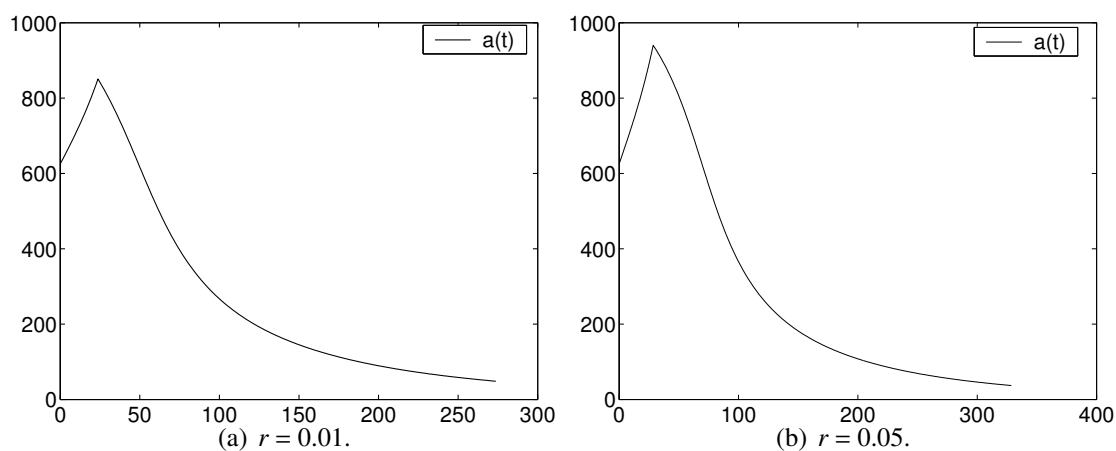
Akkumulert forurensning viser seg å bli en del større ved 5 % diskontering enn ved 1 % diskontering. (Se fig. 5). Både høyere uttaksnivå og senere teknologiskifte må ta skylden, men forskjellene er ikke dramatiske.

Når det gjelder skattetrykket er ikke virkningene av diskonteringen så veldig store. Vi ser av fig. 6 at skatten faller etterhvert som vi nærmer oss teknologiskiftet. Ved lav diskontering er der mye høyere skatt initielt, men ved teknologiskiftet er forskjellene mindre. Dette er også hva vi kunne forvente ettersom vi så at initielt uttak var følsomt for diskontering. Ellers ser vi at skatten er konkav i tiden. Fig. 7 viser også at skatten avtar med økte mengder av akkumulert

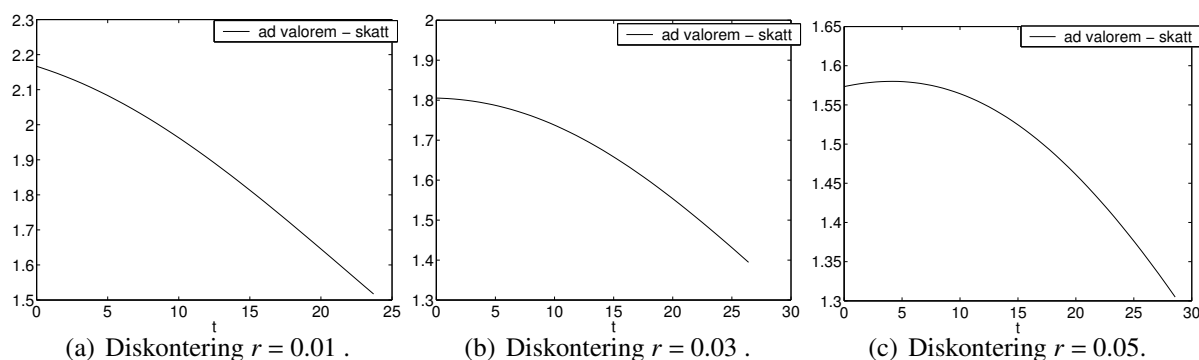
forurensning. Når a -nivåene ikke er høyere enn i disse eksemplene, ser vi også at skatten er konkav i a .

Det at skatten avtar når akkumulert forurensning øker er kanskje ikke helt intuitivt. Mange vil kanskje forvente at høy forurensning også vil gi høy skatt ettersom skaden av utslippene da er større. Men vi må også huske at når forurensningen allerede er veldig stor, så vil en liten økning være enda mindre relativt sett. En økning i skattenivå som reduserer uttaket kan da gi et større tap for markedsaktørene enn den inntekt det gir for planleggeren. I tillegg kommer at flyteksternalitetenes innvirkning i noen grad kan sies å ta over skattens uttaksdempende funksjon i tilfellet med a -avhengig etterspørsel. Numeriske eksempler viser at skattens konkavitetsegenskaper forsvinner for store a -verdier i tilfellet uten idealistiske markedsaktører.

Figur 5. Akkumulert forurensning (Gt. CO_2) for ulike diskonteringsverdier.

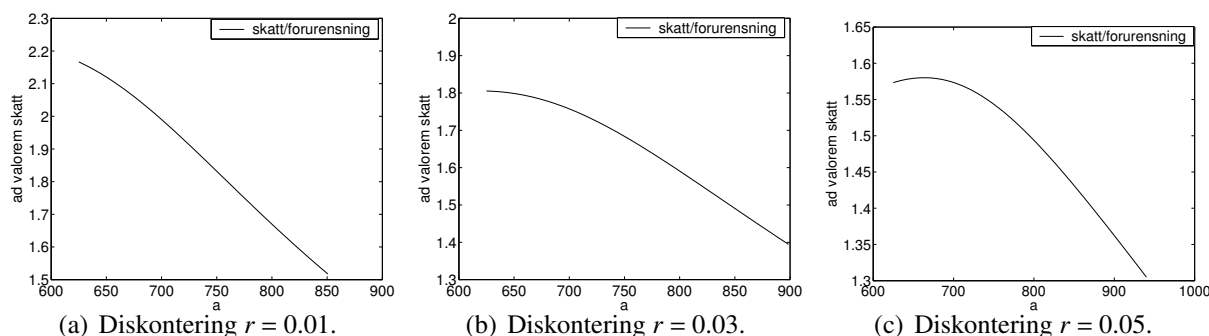


Figur 6. Ad-valorem skatt, $\theta(t)$, for ulike diskonteringsverdier.



4 OPPSUMMERING OG KONKLUSJONER

I dette arbeidet sammenlignet vi først en uregulert markedsløsning med en regulert markedsløsning. Vi såg at skatt som justerte markedslikevekten til å ta hensyn til oppsamlingseksternaliteter fikk store konsekvenser for akkumulert forurensningsnivå og teknologiskiftetidspunkt. Uten skatt gav modellen en tilstand med irreversibel forurensning ettersom det akkumulerte CO_2 -nivå ble så høyt at naturens egen rensning kollapset.

Figur 7. Skatt som funksjon av forurensning ($\theta(a)$) når $r = 0.05$.

Modellformuleringen med etterspørsel som avtok med økt forurensning virket sterkt inn på resultatene. Dette gav også irreversibel forurensning i den rene markedsløsningen, men hadde vi valgt større negativ forurensningskorrelasjon for etterspørselen kunne dette gitt et annet resultat.

Egenskapen med irreversibel forurensning er kun et mulig scenario når der brukes en ikke-lineær rensfunksjon. Dersom rensfunksjonen velges lineær, vil naturen uavhengig av forurensningsnivå rense seg selv relativt kort tid etter et teknologiskifte. Dette fordi rensningen stiger lineært med akkumulert forurensning. Uendelig stor forurensning gir dermed uendelig renssevne.

Det viser seg at antagelsen om lineær rensfunksjon resulterer i langt lavere avgifter på uttak av fossilt brensel enn ikke-lineære funksjon av den typen vi har brukt. Da vi betraktet tidshorisonten frem til teknologiskiftet for de to tilfellene, såg vi at forskjellene kunne bli svært store. Lineær rensning utsatte teknologiskiftet betydelig. Sammen med lavere avgifter gav dette et mye høyere samlet uttak over tid, og dermed ble langt mer av ressursen brukt opp. I det uregulerte tilfellet ble nesten hele ressursen brukt opp. Alt i alt er det nærliggende å konkludere med at det å bruke en lineær tilnærming til rensfunksjonen er urealistisk og misvisende når en skal si noe om den virkelige verden.

I den siste seksjonen undersøkte vi hvordan diskonteringsnivået påvirker den regulerte markedsløsningen. Resultatene var svært følsomme for diskontering slik vi normalt kan forvente. Høy diskontering gav sent teknologiskifte og lav skatt initielt. Resultatet var høyere forurensning. Skattekurvene vi observerte var konkave og fallende med tiden. Dessuten såg vi at de falt med forurensningsnivået og var svakt konkave også som funksjon av dette. Denne konkaviteten såg ut til å forsvinne for store forurensningsverdier.

I modellen vår fant vi tidspunktet frem til teknologiskiftet endogent. Den store forskjellen i T for de ulike variantene av optimeringsproblemet vi testet ut, viser hvor avgjørende det kan være å bestemme T endogent. En eksogen tilnærming gir rom for store feil.

Ellers brukte vi en tidsavhengig alternativ profitt, og viste at det lot seg gjøre å bestemme den optimale løsning med a -avhengig etterspørsel ("idealistisk marked"). Begge deler kan være med og gjøre modellen mer realistisk.

Som en avsluttende konklusjon mener vi at dette arbeidet demonstrerer viktigheten av en ytterligere økonometrisk kartlegging av modellens størrelser. Rensfunksjonens betydning viser at å få denne type basale elementer riktige er bedre enn å spekulere i ulike typer stokastiske utvidelser av problemet.

A APPENDIKS

A.1 Sosialt optimum

Vi skal her vise at $PS + CS + GS = \pi(a, y) - D(a)$. (Se fig. 1). Vi har

$$(18) \quad PS = y^* \cdot C_p(a, y^*) - \int_0^{y^*} C_p(a, x) dx.$$

$$(19) \quad CS = \int_0^{y^*} P(a, x) dx - y^*(C_p(a, y^*) + \tau(a, y^*))$$

$$(20) \quad GS = y^* \tau - D(a) - \int_0^{y^*} (C_s(a, x) - C_p(a, x)) dx.$$

Dermed får vi

$$\begin{aligned} PS + CS + GS &= y^* \cdot C_p(a, y^*) - \int_0^{y^*} C_p(a, x) dx \\ &\quad + \int_0^{y^*} P(a, x) dx - y^*(C_p(a, y) + \tau(a, y^*)) \\ &\quad + y^* \tau - D(a) - \int_0^{y^*} (C_s(a, x) - C_p(a, x)) dx \\ &= \int_0^{y^*} (P(a, x) - C_s(a, x)) dx - D(a) \\ (21) \quad &= \pi(a, y^*) - D(a). \end{aligned}$$

A.2 Eksistensbevis

Vi skal her vise at det alltid eksisterer løsning for optimeringsproblemet definert i (6) og (7). I den sammenheng begrenser vi oss til å vise at betingelsene i *Filipov-Cesaris eksistensteorem*, som vi finner som teorem 6.18 i Seierstad og Sydsæter (1987), er oppfylte.

Kravet om at mengden $N(a, y, t)$ er konveks, utgjør sammen med kravet om en øvre grense for tilstandsvariablene, de eneste ikke-trivielle betingelser stilt i dette teoremet. Når det gjelder det siste kravet har vi at $\dot{a} + \dot{s} = y - f(a) + (-y) = -f(a) \leq 0$, slik at $0 \leq a + s \leq a_0 + s_0$. Følgelig er dette tilfredsstillt.

Teoremet forutsetter at mengden

$$(22) \quad N(a, y, t) = \{(e^{-rt}[\pi(a, y) - D(a)] + \gamma, y - f(a), -y) : \gamma \leq 0, y \in [0, \hat{y}]\}$$

er konveks for alle $(a, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$. (I (22) er \hat{y} gitt ved $\pi_y(a, \hat{y}) = 0$).

Bevis: Fikser (a, t) , la $z_i \equiv e^{-rt}[\pi(a, y_i) - D(a)] + \gamma$ for $i = 1, 2$, og la y_3, z_3 være en konveks kombinasjon av y_1, y_2 og z_1, z_2 .

Vi får $\lambda(z_1, y_1 - f(a), -y_1) + (1 - \lambda)(z_2, y_2 - f(a), -y_2) = (\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 - f(a), -\lambda y_1 - (1 - \lambda)y_2) = (z_3, y_3 - f(a), -y_3)$. Konkaviteten til $\pi(a, y)$ gir $z_3 = e^{-rt}[\lambda\pi(a, y_1) + (1 - \lambda)\pi(a, y_2) - D(a)] + \lambda\gamma_1 + (1 - \lambda)\gamma_2 \leq e^{-rt}[\pi(a, y_3) - D(a)] + \lambda\gamma_1 + (1 - \lambda)\gamma_2 \Rightarrow \gamma_3 \leq \lambda\gamma_1 + (1 - \lambda)\gamma_2 \leq 0 \Rightarrow (z_3, y_3 - f(a), -y_3) \in N(a, y, T)$.

A.3 Formulering av modell

I det følgende skisserer vi først kort i seksjon A.3.1 hvordan vi kommer frem til en differensial-ligning som gir en feedback-form for den optimale kontrollen, $y = y(a)$. Deretter gjør vi i seksjon

A.3.2 rede for hvordan vi benytter oss av denne differensialligningen til å finne en numerisk løsning av modellen.

Optimeringsproblemet i ligningene (6) og (7) kan formuleres slik at det strekker seg over to perioder - før og etter teknologiskiftet. Kontrollvariabelen er uttaket, y , og vi har et tilpasningsproblem i tidspunktet T .

Hamiltonfunksjonen med tilstandsligninger, multiplikatorligninger og det indre optimalitetskravet er oppsummert i tab. 6.

Tabell 6. Førsteordens betingelser.

Beskrivelse	Første periode	Sluttperiode
Tid	$0 \leq t \leq T$	$T < t \leq \infty$
produksjon	$y > 0, \quad y(T) = y_T > 0$	$y = 0$
Sosial velferd	$\pi(a, y) - D(a)$	$\widehat{\pi}(t) - D(a)$
Tilstandsligning 1	$\dot{a} = y - f(a)$	$\dot{a} = -f(a)$
Tilstandsligning 2	$\dot{s} = -y$	
Hamilton	$\mathcal{H} = \pi(a, y) - D(a) + m(y - f(a)) - ny$	$\mathcal{H} = \widehat{\pi}(t) - D(a) - mf(a)$
Indre optimum	$\mathcal{H}_y = 0 \Leftrightarrow m - n = -\pi_y(a, y)$	
Kofaktor 1	$\dot{m} = (r + f'(a))m - \pi_a(a, y) + D'(a)$	$\dot{m} = (r + f'(a))m + D'(a)$
Kofaktor 2	$\dot{n} = rn$	$\dot{n} = rn, ns = 0 \text{ og } n, s \geq 0$

Vi krever at denne Hamilton-funksjonen, tilstandsvariablene og multiplikatorene er kontinuerlige i $t = T$.

Kofaktor 2: Løser vi ligningen for kofaktor 2 i tab. 6, får vi

$$(23) \quad n(t) = n_0 e^{rt}, \quad \text{der} \quad n_0 = n(0).$$

Dette kombinerer vi med (13) og får to muligheter for skyggeprisen $n(t)$:

Tilfelle 1: $s(T) > 0$ og $n(t) = 0$ for alle t .

Tilfelle 2: $s(T) = 0$ og $n(t) = n_0 e^{rt}$.

A.3.1 Feedback-formulering

I det følgende skal vi uten å gå inn på detaljer skissere hvordan vi utleder en 1. ordens differensialligning for feedback-kurven til y for tilfelle 1 og tilfelle 2. For begge tilfellene vil den dynamiske egenskapen

$$(24) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{H} = r(\mathcal{H}_a \dot{a} + \mathcal{H}_s \dot{s})$$

bli brukt. (En utledning av dette resultatet finnes blant annet i Sandal og Berge (2000)). Videre setter vi kravet om indre løsning, se tab. 6, inn i Hamilton-funksjonen. Dette gir

$$(25) \quad \mathcal{H}(a, y) = \pi(a, y) - D(a) - y\pi_y - mf(a).$$

Tilfelle 1: $s(t) > 0$ og $n(t) = 0$ for alle t . Det at $n = 0$ forenkler ligningssystemet (24) og (25). Vi kommer frem til differensialligningen

$$(26) \quad y'(a)(y - f)\pi_{yy} = \pi_a - D' - (y - f)\pi_{ay} + (r + f')\pi_y$$

ved å løse dette systemet. Dette er vist i Aanestad, Sandal og Berge (2003).

Tilfelle 2: $s(T) = 0$ og $n(t) = n_0 e^{rt}$. I dette tilfellet blir feedback-formen mer komplisert. I tillegg til (24) og (25) må vi trekke inn differensialligningen for kofaktor m . (Se tab. 6). Da kommer vi etter noen tekniske detaljer frem til en feedback-ligning. Istedenfor å presentere denne, presenterer vi den tidseksplisitte versjon som er noe enklere rent notasjonsmessig. Vi har

$$(27) \quad \frac{dY}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{y} \\ \dot{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - f(a) \\ G_1(a, y, m)(y - f(a)) \\ (r + f'(a))m + D'(a) \end{bmatrix},$$

med

$$G_1(a, y, m) \equiv y'(a) = \frac{\pi_a - D' - y\pi_a y - mf)(y - f) + r(y\pi_y + mf)}{y\pi_y(y - f)}.$$

Detaljene for hvordan vi kommer frem til denne ligningen er presentert i Aanestad, Sandal og Berge (2003).

A.3.2 To randverdiproblem

I seksjon A.3.1 fant vi differensialligninger for optimale løsningskurver for hvert av de to spesialtilfellene av optimeringsproblemet vårt. Nå skal vi finne tilhørende randbetingelser tilstrekkelige for å finne løsningskurvene for hvert av tilfellene.

Fremgangsmåten blir i praksis at man først antar at der ikke er noen ressursknapphet, altså tilfelle 1. Man finner tilhørende optimale løsningskurver for dette tilfellet og kontrollerer at uttaket gir $s(T) \geq 0$. Deretter søker man en løsning hvor ressursen brukes helt opp. (Tilfelle 2). Hvis der eksisterer potensielle løsninger for begge de to tilfeller, må man numerisk sammenligne overskuddet knyttet til løsningene.

Tilfelle 1: $s_T > 0$ og $n(t) = 0$ for alle t . I dette tilfellet er randkravene initialbetingelsen $a(0) = a_0$, samt overgangsbetingelsene i $t = T$. Siden $n(t) = 0$, er Hamilton-funksjonen vår $\mathcal{H} = \pi(a, y) - D(a) + m(y - f(a))$.

Ligningen for kofaktor 1 sammen med betingelsen $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0$, det indre optimalitetskravet og kravet om kontinuerlig hamilton-funksjon gir oss følgende betingelser i teknologiskiftetidspunktet: (Se Aanestad, Sandal og Berge (2003) for en utledning av disse betingelsene).⁸

$$(28) \quad m_T = m(\infty) + \int_0^{a_T} \frac{dm}{da} da \equiv G(a_T), \quad t \geq T$$

$$(29) \quad \mathcal{H}_y = 0 \Rightarrow \pi_y(a_T, y_T) + m_T = 0$$

$$(30) \quad \widehat{\pi}(T) + \gamma(a_T)y_T^2 = 0.$$

Størrelsene som skal bestemmes er T , a_T , y_T og m_T . I tillegg til de tre overgangsbetingelsene i teknologiskiftetidspunktet, (28)-(30), krever vi at initialbetingelsen er oppfylt. Vi har dermed fire randkrav og fire ukjente størrelser.

Siden vi har eksplisitt tidsavhengighet i den alternative profittfunksjonen, $\widehat{\pi}(t)$, lønner det seg å bruke eksplisitt tidsavhengighet også når vi skal finne de optimale løsningskurvene for y og a . Vi har

$$(31) \quad \frac{dY}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y - f(a)) \\ y'(a)(y - f(a)) \end{bmatrix},$$

⁸ Vi har i det følgende brukt $a(T) = a_T$, $y(T) = y_T$, $s(T) = s_T$ og $m(T) = m_T$.

der $y'(a)$ er gitt ved (26) og vi har randkravene (28) - (30) samt $a(0) = a_0$.

Det viser seg at $\frac{dY}{dt}$ er numerisk ustabil når man integrerer fra $t = 0$ til $t = T$. Går man motsatt vei fra $t = T$ til $t = 0$ blir systemet stabilt.

Siden man har randkrav både i $t = 0$ og $t = T$, er det ikke et trivielt problem å løse (31) med tilhørende randkrav. Vi ble nødt for å utvikle en egen shooting-metode som kunne håndtere dette randverdiproblemet numerisk.

Tilfelle 2: $n(t) = n_0 e^{rt}$ og $s(T) = 0$. Vi bruker følgende randkrav:

$$\begin{aligned} a(0) - a_0 &= 0 \\ (32) \quad \widehat{\pi}(T) + \gamma(a_T)y_T^2 &= 0 \\ m_T - M(a_T) &= 0 \\ s(T) &= 0. \end{aligned}$$

Dessuten innfører vi parameteren $\Omega(t)$ med initialkrav $\Omega(0) = 0$. Denne betegner samlet neddiskontert overskudd ved tidspunkt t , og er tatt med fordi differensialligningene våre med tilhørende randkrav i noen tilfeller kan ha flere løsninger slik at vi må sammenligne dem numerisk for å skille ut hvilken som er den beste. Antall mulige løsninger vil avhenge av a -avhengigheten i γ . (Se andre ligning i (32)). Dette vil vi imidlertid ikke komme noe mer inn på her.

I tillegg til de nevnte randkravene har vi $m_T - n_T = -\pi_y(a_T, y_T)$, men dette kravet bidrar ikke med noe nytt siden det innfører en ny ukjent, nemlig n_T .

Differensialligningssystem (27) utvider vi med uttrykk for \dot{s} og $\dot{\Omega}$. Dermed får vi:

$$(33) \quad \frac{dY}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{y} \\ \dot{m} \\ \dot{s} \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - f(a) \\ G_1(a, y, m)(y - f(a)) \\ (r + f'(a))m + D'(a) \\ -y \\ e^{-rt}(\pi(a, y) - D(a)) \end{bmatrix},$$

Vi ser at vi har fem randkrav og fem differensialligninger. Dette randverdiproblemet er like komplisert som tilsvarende problem under *tilfelle 1*. Vi brukte en såkalt kollokasjonsmetode for å løse problemet numerisk.

Referanser:

- Aanestad, S., Sandal, L. K. og Berge, G.(2003): «Dynamiske CO_2 -avgifter. En modell med endogent bestemt avgiftsperiode». NHH - Discussion Papers, 21.
- Farzin, Y. H. og Tahvonen, O. (1996): «Global Carbon Cycle and the Optimal Time Path of a Carbon Tax». Oxford Economic Papers, 48, 515-536.
- Kamien, M. I. og Schwarz, N. L. (1991): «Dynamic Optimization. The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management». Second Edition. Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam.
- Nordhaus, W. (1982): «How Fast Should We Graze the Global Commons?». The American Economic Review, 72, 242-246.
- Sandal, L. K. og Berge, G. (2000): «A Perturbation Approach On a Class of Optimal Control Problems, Unifying the Pontryagin and Dynamic programming Approach». NHH - Discussion Papers, 15.
- Sandal, L. K. og Steinshamn, S.I. (1998): «Dynamic corrective taxes with flow and stock externalities: A feedback approach». Natural Resource Modelling,11, 217-239.
- Sandal, L. K., Steinshamn, S. I. og Grafton, R. Q. (2003): «More is Less: The Effects of Ignoring Flow externalities». Resource and Energy Economics, 25, 239-254.
- Sandal, L. og Steinshamn, S. I. (2001): «A Simplified Feedback Approach to Optimal Resource Management». Natural Resource Modelling, 14, 419-432.
- Sandal, L. K. og Steinshamn, S. I. (2000): «Dynamiske adaptive miljøavgifter». SNF-rapport, 84.
- Seierstad, A. og Sydsæter, K. (1987): «Optimal Control Theory with Economic Applications». Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, .
- Sinclair, P. J. N. (1994): «On the Optimum Trend of Fossil Taxation». Oxford Economic Papers, 46, 869-877.
- Stollery, K. R. (1998): «Constant Utility Paths and Irreversible Global Warming». The Canadian Journal of Economics, 31, 730-742.
- Tahvonen, O. (1997): «Fossil Fuels, Stock Externalities, and Backstop technology». The Canadian Journal of Economics, 30, 855-874.
- Tahvonen, O. og Salo, S. (1996): «Nonconvexities in Optimal Pollution Accumulation». Journal of Environmental Economics and Management, 30, 160-177.
- Ulph, A. og Ulph, D. (1994): «The optimal time path of a carbon tax». Oxford Economic Papers, 46, 857-868.
- Vellinga, N. og Withagen, C. (1996): «On the concept of green national income». Oxford Economic Papers, 48, 499-514.